

# Chapitre 1: Rappels sur les méthodes des différences finies et volumes finis

## 1. Introduction

## 2. Rappel de la méthode des différences finies

*2.1 Etapes de la méthode des différences finies*

*2.2 Approximation des opérateurs différentiels (Développements en séries de Taylor)*

## 3. Rappel de la méthode des volumes finis

*3.1 Etapes de la méthode des volumes finis*

*3.2 Schémas de discrétisation*

*3.2.1 Le schéma aux différences centrées (Central Differencing Scheme, CDS)*

*3.2.2 Le schéma décentré amont ( First order Upwind Differencing Scheme, UDS)*

*3.2.3 Le schéma second ordre décentré amont ( Second order Upwind, SOU)*

*3.2.4 Le schéma hybride*

*3.2.5 Le schéma de loi de puissance (Power Law)*

*3.2.6 Le schéma QUICK*

## 4. Algorithme de résolution et couplage-vitesse pression

*4.1 Maillage décalé et non décalé*

*4.2 Algorithme de résolution*

*4.2.1 Algorithme SIMPLE*

*4.2.2 Algorithme SIMPLEC*

*4.2.3 Algorithme PISO*

## 5. Facteurs de sous relaxation

## 6. Critère de convergence

## 7. Conditions initiales et aux limites

# Chapitre 1: Rappels sur les méthodes des différences finies et volumes finis

## 1. Introduction

Les équations aux dérivées partielles du modèle mathématique sont discrétisés par une méthode de discrétisation, comme :

- La méthode des différences finies
- La méthode des éléments finis
- La méthode des volumes finis

Pour obtenir un système d'équation algébrique

La plupart des simulations de la CFD sont basées sur les deux méthodes : différences finies et volumes finis.

## 2. Rappel de la méthode des différences finies

C'est une méthode d'approximation des équations par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie. On cherche une solution exacte à partir de la discrétisation des opérateurs différentiels  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots\right)$  sur un maillage.

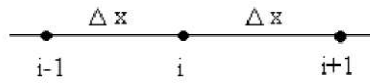
### 2.1 Etapes de la méthode des différences finies

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, on procède comme suit :

- 1- Mailler le domaine d'étude (discrétiser le domaine en nœuds)
- 2- Discrétiser les équations ainsi que les conditions aux limites
- 3- Constitue le système d'équation global
- 4- Résoudre ce système

## 2.2 Approximation des opérateurs différentiels (Développements en séries de Taylor)

Soit le maillage régulier 1D :



*Fig. 3.1 Maillage 1D.*

où  $\Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$ .

Le développement en série de Taylor, autour du point  $i$  du maillage, de la variable inconnue, est donné par les relations :

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \frac{1}{1!} \Delta x \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)_i - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \left( \frac{d^3\Phi}{dx^3} \right)_i + O((\Delta x)^4); \quad (3.1)$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \frac{1}{1!} \Delta x \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)_i + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \left( \frac{d^3\Phi}{dx^3} \right)_i + O((\Delta x)^4). \quad (3.2)$$

En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.1), on obtient :

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Ceci signifie que la dérivée d'ordre 1, au point  $i$ , est approchée par différences finies régressives d'ordre 1. En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.2) on obtient :

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}, \quad (3.4)$$

ce qui signifie que la dérivée d'ordre 1, au point  $i$ , est approchée par différences finies progressives d'ordre 1.

En soustrayant la relation (3.1) de la relation (3.2) on obtient l'approximation par différences finies centrales d'ordre 2 :

$$\left( \frac{d\Phi}{dx} \right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.5)$$

En additionnant les relations (3.1) et (3.2) on obtient l'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies centrées d'ordre 2 :

$$\left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right)_i = \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.6)$$

### 3. Rappel de la méthode des volumes finis

La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

#### 3.1 Etapes de la méthode des volumes finis

L'équation de transport générale d'une quantité quelconque  $\phi$  dans un fluide en mouvement peut s'écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)} + \underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi)} = \underbrace{\sum_{j=1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)} + \underbrace{S_\phi} \quad (1)$$

**Terme temporel   Terme de convection   Terme de diffusion   Terme source**

Avec:

- $\phi$ : 1 ou U ou V ou W ou T et  $\Gamma_\phi$ : coefficient de diffusion.
- Le flux convectif de  $\phi$ : Transport de  $\phi$  par le courant même du fluide en Mouvement, est donnée par la formule suivante:  $\rho U_n \phi dS$  (n: normale à dS).
- Le flux diffusif de  $\phi$ : Transport de  $\phi$  par l'interaction des molécules en agitation, est donnée par la formule suivante:  $\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$  (n : normale à dS).

Le champs de la variable dépendante dans un domaine d'étude est déterminé par la méthode des volumes finis. La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar.

La technique des volumes finis comporte essentiellement les étapes suivantes:

1. **Génération du maillage:** Bien définir le domaine d'étude et le décomposer en petits sous domaines entourant les nœuds du maillage appelés volumes finis; (génération du maillage ou discrétisation du domaine)

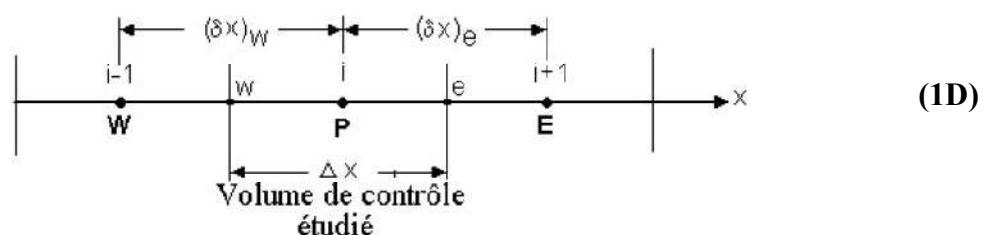
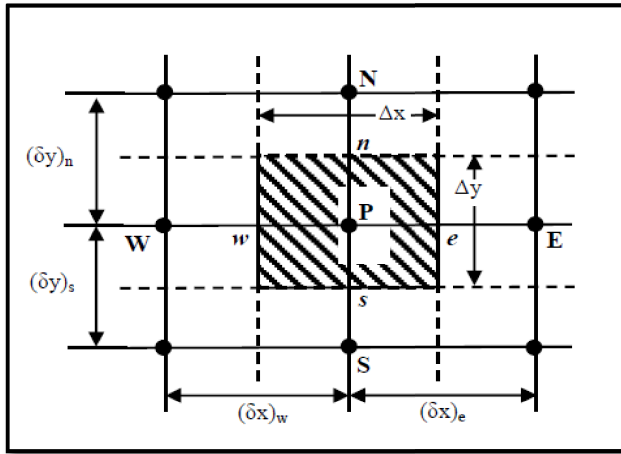
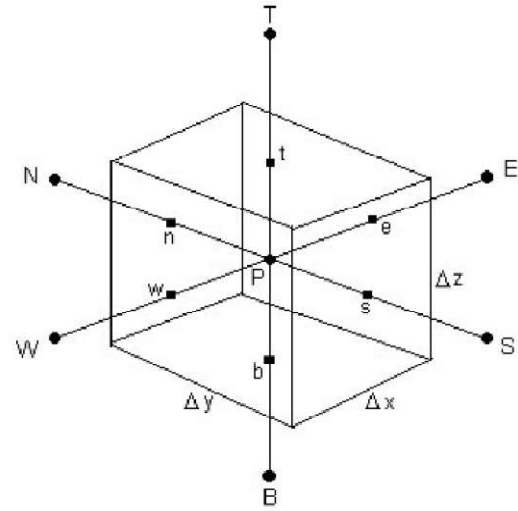


Figure 1. Volume de contrôle 1D.



(2D)



(3D)

Figure 2. Volumes de contrôle 2D et 3D.

2. **Discrétisation:** Intégrer les équations de transport sur chaque volume pour obtenir une équation discrétisée au point nodal P.
3. **Conditions initiales et aux limites:** Incorporer les conditions initiales et aux limites appropriées.
4. **Résolution du système d'équation:** Résoudre le système algébrique final par une méthode de résolution (itérative ou semi itérative ou directe pour obtenir un champs approché de  $\phi$  dans les points discrets appelés nœuds du domaine considéré.

### 3.2 Schémas de discrétisation

Pour présenter les différents schémas de discrétisation, on prend le problème simple de convection-diffusion 1-D stationnaire régi par l'équation:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

L'écoulement doit satisfaire l'équation de continuité (conservation de la masse):

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0$$

En intégrant l'équation ci-dessus sur le volume de contrôle ci-dessous:

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} (\rho u \Phi) dV = \int_{VC} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dV \quad \text{ou} \quad \int_w^e \frac{d}{dx} (\rho u \Phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dx$$

On trouve:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

On mentionne le flux convectif par la lettre F et le flux diffusif par la lettre D qui seront définis comme suit:

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

Les valeurs de ces variables sur les deux facettes e et w s'écrivent:

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e & F_w &= (\rho u)_w \\ D_e &= \frac{\Gamma_e}{\Delta X_e} & D_w &= \frac{\Gamma_w}{\Delta X_w} \end{aligned}$$

Pour simplifier, la section droite de part et d'autre sera maintenue constante

$$A_w = A_e = A$$

Enfin les deux équations (1) et (2), s'écrivent:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad \dots\dots\dots(*)$$

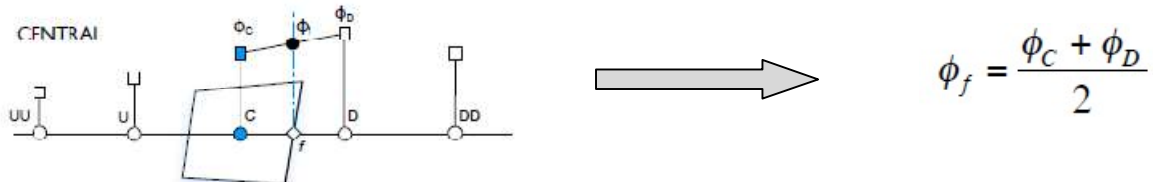
Terme convectif aux interfaces  
du Volume de contrôle

et  $F_e - F_w = 0$

Pour les termes diffusifs, on utilise le schéma des différences centrée. Cependant pour le terme convectif et pour évaluer la variable à l'interface, nous utilisons plusieurs différents schémas de discrétisations ou différents interpolations, que nous allons les exposer dans la section suivante.

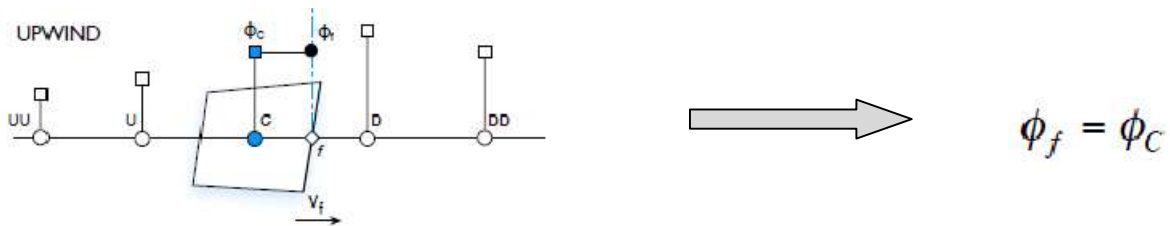
### 3.2.1 Le schéma aux différences centrées (Central Differencing Scheme, CDS)

En appliquant une interpolation linéaire et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance de noeuds on trouve :



Ce schéma est valable pour  $\Rightarrow Pe_e = \frac{|F_e|}{D_e} < 2 \quad |Pe| \leq 2$

### 3.2.2 Le schéma décentré amont (First order Upwind Differencing Scheme, UDS)



### 3.2.3 Le schéma second ordre décentré amont (Second order Upwind, SOU)

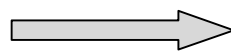
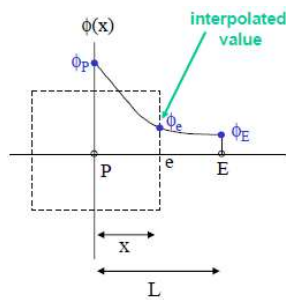


### 3.2.4 Le schéma hybride

Est une combinaison du schéma centré et Upwind

$$\begin{array}{ll} |Pe| > 2 & UDS \\ |Pe| < 2 & CDS \end{array}$$

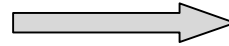
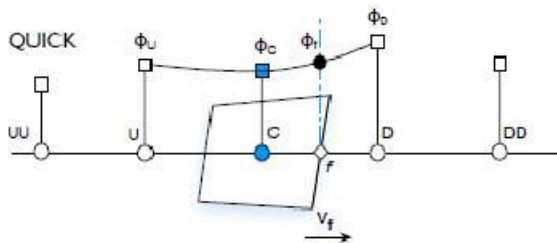
3.2.5 Le schéma de loi de puissance (Power Law) (dérivé du schéma exponentiel- solution exact)



$$\phi_e = \phi_P - \frac{(1 - 0.1Pe)^5}{Pe} (\phi_E - \phi_P)$$

3.2.6 Le schéma QUICK

(Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics)



$$\phi_f = \frac{3}{4} \phi_C - \frac{1}{8} \phi_U + \frac{3}{8} \phi_D$$

**4. Algorithme de résolution et couplage-vitesse pression**

La résolution des équations de quantité de mouvement et l'équation de continuité donne en principe le champ des vitesses et le champ de pression. La pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement. Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

Le couplage Vitesse-Pression est traité en résolvant les équations de quantité de mouvement et une équation pour la pression dérivée d'une combinaison de l'équation de continuité et celles de quantité de mouvement. "Fluent" dispose de trois algorithmes de couplage (SIMPLE, SIMPLEC, PISO). L'algorithme de résolution est une méthode itérative qui permet de calculer les vitesses et la pression. Après convergence de la solution, les champs de vitesse et de pression doivent satisfaire simultanément l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement



#### 4.1 Maillage décalé et non décalé

L'intégration des équations de quantité de mouvement sur deux types de volumes de contrôle qui sont:

##### Maillage décalé: (Staggered mesh)

Au centre de chaque volume de contrôle sont stockées les quantités scalaires (exemple : pression et température) et les quantités vectorielles (vitesses) sont localisées aux faces des volumes de contrôle. L'intégration des équations de quantité de mouvement se fera sur des volumes décalés (voir figure)

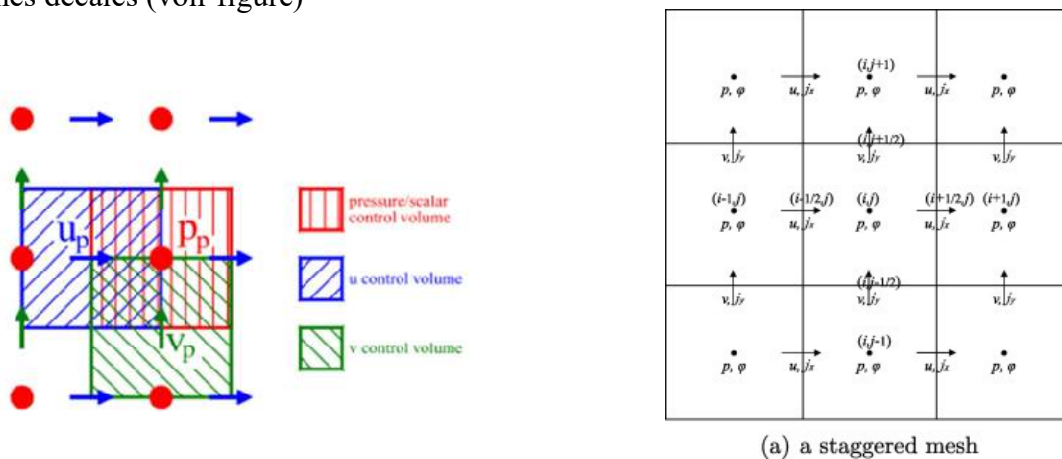


Figure 2. Maillage décalé

##### Maillage non décalé : (Co-located)

Toutes les quantités scalaires (exemple : pression et température) et les quantités vectorielles (vitesses) sont stockées au centre de chaque volume de contrôle. L'intégration des équations de quantité de mouvement se fera sur des volumes non décalés (voir figure)

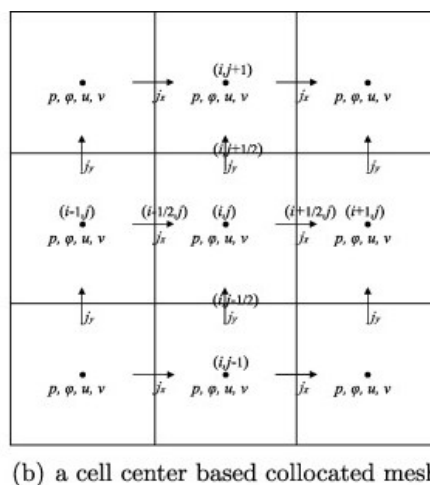


Figure 2. Maillage non décalé

## 4.2 Algorithme de résolution

### a. Détermination de l'équation de correction de la pression (Rappel) (algorithme simple)

L'intégration de l'équation générale de transport pour 'U' et pour 'V' sur les deux volumes de contrôle spécifiques aux composantes de vitesse donne les équations suivantes:

$$a_e U_e = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + (P_P - P_E) A_e + b_U \dots\dots\dots(a)$$

$$a_n V_n = \sum_{nb} a_{nb} V_{nb} + (P_P - P_N) A_n + b_V$$

L'étape de prédiction consiste à donner un champ de pression  $P^*$  pour obtenir des valeurs estimées de la vitesse  $U^*$  et de  $V^*$  à partir des équations suivantes :

$$a_e U_e^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_U \dots\dots\dots(b)$$

$$a_n V_n^* = \sum_{nb} a_{nb} V_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_V$$

En général, les valeurs obtenues des vitesses ne vérifient pas l'équation de continuité.

C'est pourquoi on corrige la pression estimée  $P^*$  par  $P'$  donnée par:

$$P = P^* + P'$$

De la même façon pour la vitesse :

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

Où  $P', U', V'$  : sont les corrections de la pression et des vitesses

En soustrayant l'équation (a) de (b), on trouve:

$$a_e U_e' = \sum a_i \overset{0}{\cancel{U_i}} + A_e (P_P' - P_E')$$

$$a_n V_n' = \sum a_j \cancel{V_j} + A_n (P_P' - P_N')$$

Et pour une résolution numérique très correcte, on néglige les termes  $(\sum a_i U_i')$   $(\sum a_j V_j')$  par rapport aux termes de pression.

Alors, nous pouvons réécrire :

$$U_e' = de(P_P' - P_N')$$

$$V_n' = dn(P_P' - P_N')$$

D'où :

$$de \frac{A_e}{a_e} \quad , \quad dn \frac{A_n}{a_n}$$

Les champs des vitesses seront corrigés par les équations suivantes:

$$U_e = U_e^* + d_e(P_p^{\dot{}} - P_E^{\dot{}})$$

$$V_n = V_n^* + d_n(P_p^{\dot{}} - P_N^{\dot{}})$$

Il est à noter que le même raisonnement sera suivi pour les vitesses  $U_w$  et  $V_s$

L'équation de continuité discrétisée pour un volume de control s'écrit:

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \quad \dots\dots\dots(*)$$

En remplaçant dans l'équation les vitesses  $U_e, U_w, V_n$  et  $V_s$  par leurs expressions

$$\Rightarrow a_p P_p^{\dot{}} = a_E P_E^{\dot{}} + a_w P_w^{\dot{}} + a_N P_N^{\dot{}} + a_s P_s^{\dot{}} + b$$

**Equation de correction de la pression**

$$a_E = d_e A_e$$

$$a_W = d_w A_w$$

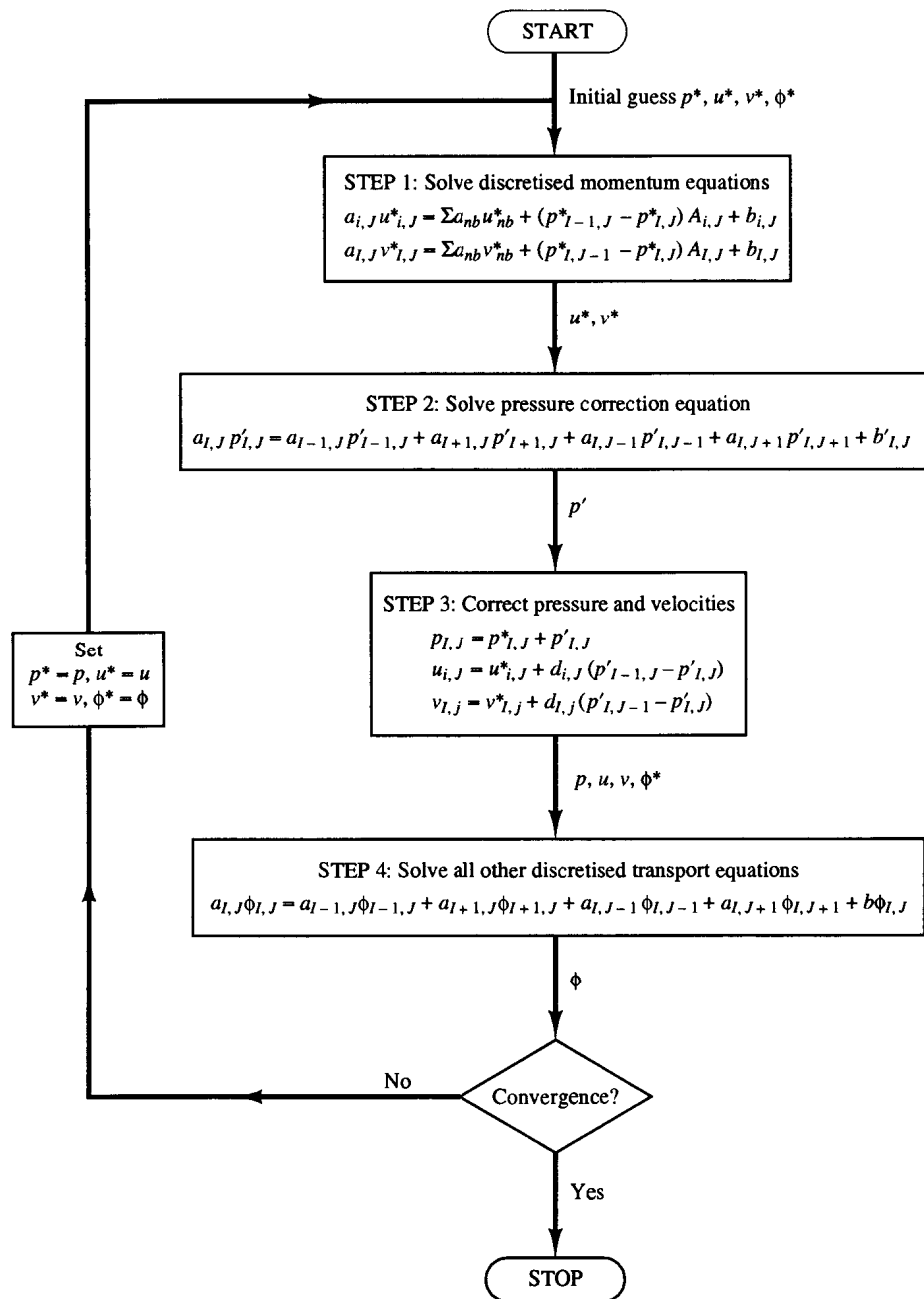
$$a_N = d_n A_n$$

$$a_S = d_s A_s$$

$$b = U_e^* A_e - U_w^* A_w + V_n^* A_n - V_s^* A_s$$

### 4.2.1 Algorithm SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)

Fig. 6.6 The SIMPLE algorithm



#### 4.2.2 Algorithme SIMPLEC

Méthode SIMPLEC (SIMPLE Consistent). a été mis au point par Van Doormal et Raithby. Les étapes de cet algorithme sont presque les mêmes que celles de l'algorithme SIMPLE avec la différence que dans les équations de correction des vitesses on néglige les termes les moins significatifs.

#### 4.2.3 Algorithme PISO

L'algorithme PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) a été mis au point par Issa (1986). Cet algorithme a été développé initialement comme une procédure non itérative pour le calcul des écoulements compressibles instationnaires. Ultérieurement l'algorithme a été bien adapté pour la procédure itérative appliquée aux problèmes stationnaires. L'algorithme est une extension de l'algorithme SIMPLE ayant une étape de correction de plus.

### **5. Facteurs de sous relaxation**

A cause de non linéarité des équations résolues, il est possible, pour atténuer les fluctuations de la solution, de réduire les variations des variables d'une itération à une autre en introduisant une sous-relaxation pour éviter la divergence du processus itératif et augmenter la stabilité du calcul.

$$\phi_P^{new, used} = \phi_P^{old} + \alpha (\phi_P^{new, predicted} - \phi_P^{old})$$

$0 < \alpha < 1$  : est le facteur du sous relaxation.

### **6. Critère de convergence**

En général, le critère de convergence est utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait. Il est basé sur la différence des variables calculées à la fin de 2 itérations nécessaires et en chaque nœud du maillage.

$$|\phi^{n+1} - \phi^n| \leq R_\phi \text{ (Petit nombre)} \quad (I.1)$$

A chaque itération, FLUENT permet de juger de l'état de convergence par le biais du calcul des résidus  $R_\phi$  (voir figure)

Le résidu correspond à la somme sur toutes les mailles, des erreurs effectuées sur l'équation discrétisée en question lorsque les variables déterminées par le processus sont réintégréées dans l'équation discrétisée. Il s'écrit donc sous la forme :

$$R_\phi = \sum_{all\ cells} |a_P \phi_P - \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} - b|$$

Fluent adimensionnalise le résidu précédent en utilisant un facteur d'échelle représentatif du débit de  $\phi$  à travers le domaine (Fluent, 6.3). Ce résidu relatif ou normalisé est défini par :

$$R_\phi = \frac{\sum_{all\ cells} |a_P \phi_P - \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} - b|}{\sum_{all\ cells} |a_P \phi_P|}$$

## 7. Conditions initiales et aux limites

### a. Les conditions initiales

Les conditions initiales doivent être prescrites dans tout le domaine pour toutes les variables dépendantes régies par une équation de transport instationnaire.

### b. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites doivent être prescrites sur toutes les frontières entourant le domaine. On peut citer quelques conditions aux limites largement utilisées qui sont:

**Entree:** généralement les profils de vitesse (Velocity inlet) et des autres quantités transportables sont données à l'entrée.

**Sortie:** On cite deux types de condition aux limites:

- **Condition du régime établi (Outflow):** Tous les gradients sont nuls sauf la pression. Ce type de condition aux limites est utilisé lorsqu'on ne connaît pas les détails de la vitesse et de la pression à la sortie.
- **Pression de sortie (Pressure outlet):** On définit la pression statique à la sortie qui est connue

**Symétrie:** Tous les gradients sont nuls

**Paroi immobile:** Condition de non glissement (les vitesses sont nuls)