المحاضرة السابعة والأخيرة : اختبار الفرضيات

- أولا: اختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين مستقلين طبيعيي التوزيع $(\mu_1 - \mu_2)$

- ثانيا: اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة (P)

- ثالثا: اختبار الفرق بين نسبتين $(P_1 - P_2)$

تمهيد:

عند الرغبة في التحقق من ادعاء (فرضية) ما أو التحقق من معلومة معينة عن المجتمع الإحصائي يتم عادة سحب عينة عشوائية من هذا المجتمع وحساب بعض المعالم لها، ثم نستخدم طرق إحصائية معينة للتحقق من صحة أو عدم صحة هذا الإدعاء، وقبل الخوض في هذه الإختبارات سنذكر بعض المفاهيم الخاصة التي ستمكننا من فهم الإختبارات وتطبيقاتها.

الفرضية الإحصائية (Statistical Hypothesis): هي كل عبارة تكون صحتها أو عد صحتها يحتاج على قرار.

يُرمز للفرضية بالرمز H فمثلاً لو كانت الفرضية أن متوسط درجات الطلاب يساوي 75 درجة فيمكن أن نصيغ افرضية التالية:

$$\mathrm{H}: \mu = 75$$

– **الفرضية الصفرية (Null Hypothesis)**: تسمى فرضية العدم وتصاغ عادة بحيث تنفي وجود فروق جوهرية بين معالم العينة ومعالم المجتمع، ومن هنا سميت بفرضية العدم، وهي الفرضية التي يتم اختبار إمكانية رفضها على اعتبار أنها صحيحة ويرمز لها بالرمز H_0.

– **الفرضية البديلة (Alternative Hypothesis)**: وهي فرضية مكملة لفرضية العدم، حيث يتم قبولها عند رفض فرضية العدم أو رفضها عند قبول فرضية العدم، ويرمز لها بالرمز(H_1)، وتأخذ هذه الفرضية أشكالاً مختلفة، وتصاغ الفرضية الصفرية كما يلي:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$

وتصاغ الفرضية البديلة بأحد الطرق التالية:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

حيث تشير كل صورة للفرضية الصفرية إلى جهة الإختبار ما إذا كان من جهة واحدة أو من جهتين، فمثلاً $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ تعني أن وسط المجتمع لا يساوي μ_0، و إنما أكبر منها أو أصغر منها، وهي تعبر عن أن الإختبار ذو وجهين (Two tails)، في حين أن الفرضية $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$ تعني أن وسط المجتمع أكبر من μ_0، أما الفرضية ($\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$) تعني أن وسط المجتمع أصغر من μ_0، وهما تعنيان أن الإختبار في جهة واحدة One tail.

قد يحدث أحياناً أن نقبل الفرضية الصفرية وهي خاطئة أو نرفضها وهي صحيحة، وهذا يقودنا لذكر هذين الخطأين بشئ من التوضيح.

الخطأ من النوع الأول Type I Error: يحدث هذ الخطأ عند رفض(H_0) وهي صحيحة، ويرمز لاحتمال هذا الخطأ بالرمز α، وتسمى α مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة، ويحدد هذا المستوى من قبل الباحث حسب الدراسة وحسب الدقة المطلوبة، وتؤخذ قيمة α في الحسابات كاملة إذا كان الإختبار في اتجاه واحد، وتقسم لنصفين إذا كان الإختبار في اتجاهين، وتحسب α من العلاقة:

$$\alpha = P(\text{reject } H_0 / H_0 \text{ is true})$$

الخطأ من النوع الثاني Type II Error: يحدث هذا الخطأ عند قبول (H_0) و هي خاطئة، ولكن نتـــائج التجربـــة أكدت قبولها، ويرمز لاحتمال هذا الخطأ (β)، ويحسب من العلاقة:

$$\beta = P(\text{accept} H_0 / H_0 \text{ is False})$$

وبصورة مكافئة:

$$\beta = P(\text{accept} H_0 / H_0 \text{ is true})$$

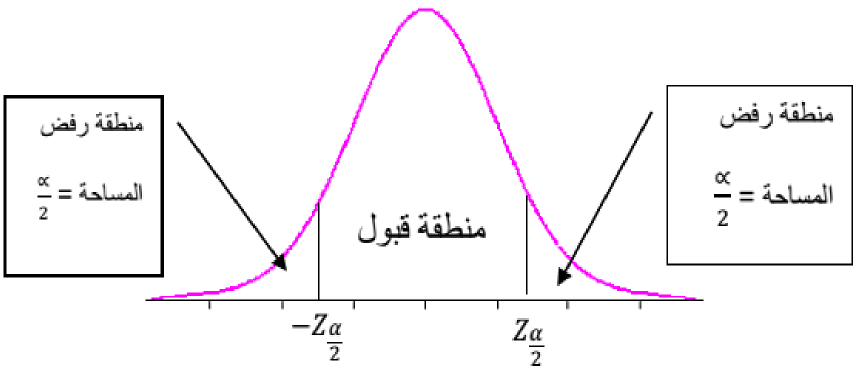
قوة الإختبار Power of Test (Pot): تعرف قوة الإختبار على أنها مقياس لكفاءة الإختبار، وبالتالي لدقة الإســـتنتاج الإحصائي وهي مكملة احتمال الخطأ من النوع الثاني بمعنى:

$$Pot = 1 - \beta$$

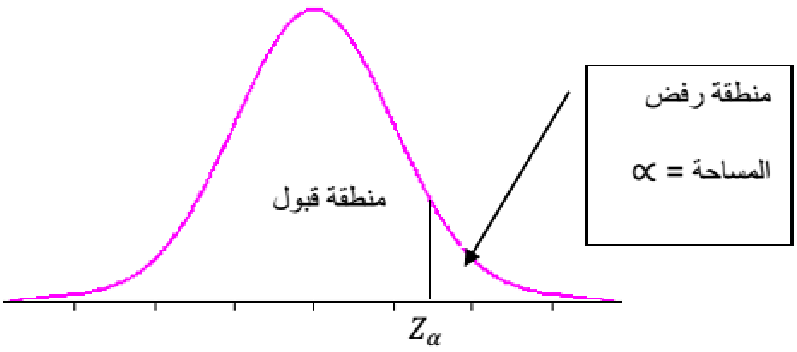
- المنطقة الحرجة والقيمة الحرجة المعيارية:

تعرف المنطقة الحرجة بأنها المساحة التي تقع أسفل منحنى دالة التوزيع الإحتمالي المستخدم في عملية التحليل الإحصـــائي، وتمثل احتمال رفض(H_0) وهي صحيحة، وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الرفض، وتحدد حسب نوع الفرضية البديلة ويحدد قيمتها مستوى المعنوية ($\alpha\%$).

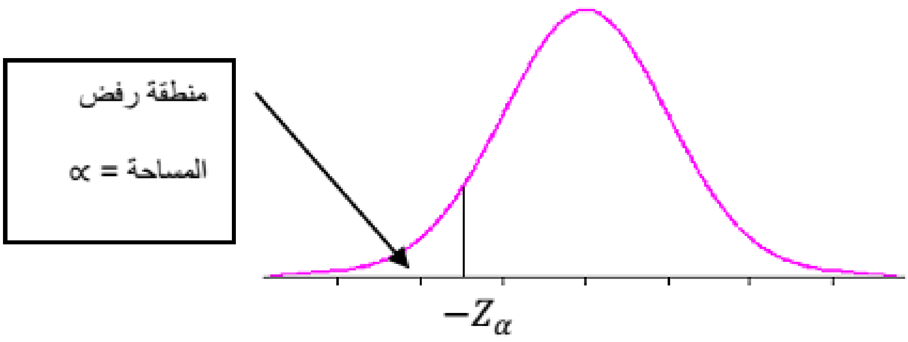
وتسمى باقي المساحة أسفل المنحنى بمنطقة القبول وقيم التوزيع الإحتمالي التي تفصل بين المنطقتين بالقيم الحرجة المعيارية، والرسم التالي يوضح هذه المفاهيم.



الرسم يوضح مناطق القبول والرفض في حالة $H_1 : \mu \neq \mu_0$



الرسم يوضح مناطق القبول والرفض في حالة $H_1 : \mu > \mu_0$



الرسم يوضح مناطق القبول والرفض في حالة $H_1 : \mu < \mu_0$

بعد أن تعرفنا على بعض المفاهيم الخاصة باختبار الفرضيات نذكر الآن الخطوات المتبعة في عملية اختبار الفرضيات:

- صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة بصورة صحيحة؛
- تحديد مستوى المعنوية المطلوب؛
- تحديد التوزيع المستخدم في الإختبار وحساب القيم الحرجة المعيارية وتسمي هذه القيم أيضاً بالقيم الجدولية؛
- نجد المعيار وهو القيمة التي تحسب من معطيات العينة مستخدمين علاقة خاصة مستنبطة من التوزيع المستخدم.
- نقارن بين المعيار والقيم الجدولة لتقرير قبول (H_0) أو رفضها.

ويتم رفض أو قبول (H_0) كما يلي:

مقارنة القيمة المحسوبة بالقيم الجدولية وذلك كما يلي:

- في حالة الفرضية البديلة من نوع $[H_1 : \mu \neq \mu_0]$، يتم رفض الفرضية العدمية (H_0) عندما تكون قيمة إحصائية الإختبار (Z_{cal}) المحسوبة أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية (Z_α) أي أن $[|Z_{cal}| \geq Z_{\alpha/2}]$، مما يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع (μ) والقيمة المفترضة (μ_0) وفقاً لمعطيات العينة عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه يتم قبول الفرض العدمي (H_0).
- في حالة الفرضية البديلة من نوع $[H_1 : \mu > \mu_0]$: يتم رفض الفرضية العدمية (H_0) عندما تكون قيمة إحصائية الإختبار (Z_{cal}) المحسوبة أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية (Z_α) أي أن $[Z_{cal} \geq Z_\alpha]$، مما يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع (μ) والقيمة المفترضة (μ_0) وفقاً لمعطيات العينة عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه يتم قبول الفرض العدمي (H_0).
- في حالة الفرضية البديلة من نوع $[H_1 : \mu < \mu_0]$: يتم رفض الفرضية العدمية (H_0) عندما تكون قيمة إحصائية الإختبار (Z_{cal}) المحسوبة أقل من أو تساوي القيمة الجدولية (Z_α) أي أن $[Z_{cal} \leq -Z_\alpha]$، مما يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع (μ) والقيمة المفترضة (μ_0) وفقاً لمعطيات العينة عند مستوى المعنوية (α)، وبعكسه يتم قبول الفرض العدمي (H_0).

و فيما يلي نتطرق لاختبارات مهمة كما يلي:

أولا: اختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين مستقلين طبيعيي التوزيع:

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها n_1 و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها n_2 وكان المجتمعين مستقلين، و نريد اختبار تساوي متوسطي المجتمعين فتكون الفرضية الصفرية كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

ويمكن لهذه الفرضية أن تأخذ شكلاً آخر أكثر مرونة وشيوعاً وهو:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

وتأخذ الفرضية البديلة إحدى الصور التالية:

$$\begin{cases} H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

وسنذكر حالات مختلفة لاختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين وهي:

1- عند معلومية σ_1^2 و σ_2^2:

في هذه ا لحالة يستخدم التوزيع الطبيعي في الإختبار ويكون المعيار في هذه الحالة:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0\,,1)$$

مثال: إذا علمت أن $X_1 \sim N(\mu_1, 36)$ وسحبت منه عينة حجمها 16 مشاهدة وسطها الحسابي 30 و $X_2 \sim N(\mu_2, 25)$، وسحبت منه عينة حجمها 12 مشاهدة وسطها الحسابي 3، اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى المعنوية الإحصائية 10 %؟

الحل: حسب المعطيات لدينا: $\overline{x}_2 = 33$، $n_2 = 12$ ، $\overline{x}_1 = 30$، $n_1 = 16$

- الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي، وحيث أن $\alpha = 0.1$ والإختبار ذو اتجاهين، ومنه نجد أن $\frac{\alpha}{2} = 0.05$، وتكون القيم الحرجة هي:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.64 \quad , \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.64$$

- حساب إحصائية الإختبار Z_{cal} : $Z_{cal} = \frac{30 - 33}{\sqrt{\frac{36}{16} + \frac{25}{12}}} = -1.44$

- المقارنة والقرار:

لدينا $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.64) < |Z_{cal} = -1.44| \Leftarrow$ نقبل الفرضية الصفرية، وبالتالي المجتمعان لهما تقريبا نفس الوسط الحسابي، وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية.

2- عند مجهولية σ_1^2 و σ_2^2 وحجم العينتين كبير:

مثال: أخذت عينتان من مجتمعين طبيعتين مستقلين، والجدول يبين بعض احصاءاتها

	المجتمع الأول	المجتمع الثاني
حجم العينة	50	60
متوسط العينة	57.5	54.4
الإنحراف المعياري للعينة	6.2	10.2

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، اختبر صحة هذا الإدعاء عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل:

- الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وذلك لكبر حجم العينتين، وحيث أن $\alpha = 0.05$، والإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيمة الحرجة:

$$Z_{\alpha} = 1.64$$

- حساب إحصائية الإختبار Z_{cal}:

$$Z_{cal} = \frac{57.5 - 54.4}{\sqrt{\frac{(6.2)^2}{50} + \frac{(10.6)^2}{60}}} = 1.91$$

- المقارنة والقرار:

لدينا $(Z_{\alpha} = 1.64) < (Z_{cal} = 1.91) \Leftarrow$ نرفض الفرضية الصفرية، وعليه نعتبر أن هذا دليلاً كافياً على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية.

ملاحظة هامة: بحساب مجال الثقة لوسط المجتمع في هذا المثال السابق نجد أنه [0.435 ، 5.765]، ولاحظ أن هذا المجال لا يحتوي على القيمة صفر، وهو الذي نختبر صحته كفرق بين وسطي المجتمعين، وبالتالي فمجال الثقة يخبرنا بأنه احتمال 95% لن يكون الفرق بين وسطي المجتمعين يساوي صفر، أي يكون وسطي المجتمعين غير مساوٍ.

وهنا نتساءل أي المجتمعين له وسط أكبر من الثاني؟؛

للإجابة على هذا السؤال لاحظ أننا قبلنا الفرضية القائلة $\mu_1 - \mu_2 > 0$، وبالتالي $\mu_1 > \mu_2$، مما يدل على أن المجتمع الأول له وسط حسابي أكبر من المجتمع الثاني.

3– عند مجهولية تباين المجتمعين الطبيعيين وكان على الأقل حجم أحد العينتين صغير:

في هذه الحالة يستخدم توزيع (t) في الإختبار، وسنميز هنا حالتين:

3–1– إذا كان: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$:

يكون المعيار في هذه الحالة:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} \sim t_{(n+m-2)}$$

حيث أن:

$$S_P^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

مثال: إذا علم أن $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ وسحبت منه العينة $\{5, 6, 3, 7, 8\}$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$، وسُحبت منه العينة $\{12, 10, 8, 12, 9, 5\}$،

المطلوب: اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟.

الحل: من معطيات السؤال نحسب ما يلي:

$\bar{x}_1 = 5.8$ ، $\bar{x}_2 = 9.33$ ، $S_1^2 = 3.7$ ، $S_2^2 = 7.076$

$$S_P^2 = \frac{(5-1)\times 3.7 + (6-1)\times 7.076}{5+6-2} = 5.58$$

$$S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}^2 = 5.58 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 2.046$$

– الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

– التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هنا هو توزيع (t) بدرجات حرية 9، و ذلك لصغر حجم العينتين وحيث أن: $\alpha = 0.05$ و الإختبار ذو اتجاهين إذن تكون القيم الحرجة:

$$-t_{(0.025,9)} = -2.262 \quad , \quad t_{(0.025,9)} = 2.262$$

– حساب إحصائية الإختبار t_{cal}:

$$t_{cal} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{5.8 - 9.33}{1.43} = -2.47$$

– المقارنة والقرار:

لدينا: $\left|t_{cal} = -2.47\right| < (t_{(0.025,9)} = -2.262) \Leftarrow$ نرفض الفرضية الصفرية، و عليه نعتبر أنه يوجد فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين.

ثانيا: اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة:

تأخذ الفرضية الصفرية الشكل التالي:

$$H_0 : P = P_0$$

و الفرضية البديلة تأخذ الصور:

$$\begin{cases} H_1 : P \neq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$$

ويكون المعيار في هذه الحالة:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0\,,1)$$

مثال: إذا كانت نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع إلزام الإستعمال) هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 200 سائق بعد صدور تشريع الإلزام فوجد أن 170 منهم يستعملون الحزام.

المطلوب: اختبر عند مستوى دلالة إحصائية $\alpha = 0.05$ ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستعملين له.

الحل: **لدينا** $P = 0.08$ ، $\hat{P} = \frac{170}{200} = 0.85$

– الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : P = 0.8 \\ H_1 : P > 0.8 \end{cases}$$

– التوزيع والقيم الحرجة المعيارية: التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وحيث أن: $\alpha = 0.05$، و الإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيم الحرجة:

$$Z_\alpha = 1.64$$

– حساب إحصائية الإختبار Z_{cal} :

$$Z_{cal} = \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{200}}} = 1.8$$

– المقارنة والقرار:

لدينا $(Z_{\alpha}=1.64)<(Z=1.8)\Leftarrow$ نرفض الفرضية الصفرية وعليه فإن صدور التشريع قد زاد من نسبة مستعملي حزام الأمان.

ثالثا: اختبار الفرق بين نسبتين $(P_1 - P_2)$:

بفرض أن $X_1 \sim b(N_1,P_1)$، وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_1 \geq 30$، و $X_2 \sim b(N_2,P_2)$، وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_2 \geq 30$، وكان المجتمعان مستقلين، ونريد اختبار تساوي نسب المجتمعين فتكون الفرضية الصفرية كما يلي:

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

وتأخذ الفرضية البديلة إحدى الصور:

$$\begin{cases} H_1 : P_1 - P_2 \neq 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 > 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 < 0 \end{cases}$$

ويكون المعيار المستخدم هو:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال: إذا كان نسبة التالف من إنتاج مصنع **(1)** لإنتاج المصابيح الكهربائية أقل من نسبة التالف في مصنع **(2)**، وبالتالي فإن صاحب المصنع **(1)** يدعي أن إنتاج مصنعه أفضل من إنتاج المصنع **(2)**، ولاختبار هـــذا الإدعـــاء أخذت عينة من كل مصنع وفحصت العينتان، وتم فحص عدد القطع التالفة في كل مصنع، والجدول الموالي يبين نتائج هذه التجربة.

	المصنع **(1)**	المصنع**(2)**
حجم العينة	**50**	**100**
عدد القطع التالفة	**4**	**5**

هل تدعم هذه البيانات صحة ادعاء صاحب المصنع **(1)** عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل: نحسب نسب التالف في المصنعين:

المصنع(1): $\hat{P}_1 = \frac{4}{50} = 0.08$

المصنع (2): $\hat{P}_2 = \frac{5}{100} = 0.05$

– الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 - P_2 = 0 \\ H_1 : P_1 - P_2 > 0 \end{cases}$$

– التوزيع والقيم الحرجة المعيارية:

التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، والإختبار ذو اتجاه واحد نحو اليمين إذن تكون القيمة الحرجة:

$$Z_\alpha = 1.64$$

– حساب إحصائية الإختبار Z_{cal} :

$$Z_{cal} = \frac{0.08 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{50} + \frac{0.05 \times 0.95}{100}}} = 0.68$$

– المقارنة والقرار:

حيث أن $(Z_\alpha = 1.64) < (Z_{cal} = 0.68) \Leftarrow$ نقبل الفرضية الصفرية وعليه لا يوجد دليل كافٍ على ادعاء مسؤول المصنع (1).