المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير

2021/2020
رياضيات 1
مسؤول المقياس: أ. حجاج مراد

حل سلسلة تمارين رقم 03

التمرين الأول

-1 ليكن $x > 0$: نطبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة Ln في المجال $[x\,, x+1]$ إذن يوجد $c \in]x\,, x+1[$ حيث :

$$\frac{1}{c} = \frac{Ln(x+1) - Lnx}{(x+1) - x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = Ln(x+1) - Lnx$$

لكن $x < c < x+1$ إذن $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+1} < Ln(x+1) - Lnx < \frac{1}{x}$ .... (1)

-2 رتابة f و g على $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\grave{f}(x) = \left[e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]' = \left[xLn\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]' e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left[Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left[Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(1+x)}\right] e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left[Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(1+x)}\right] e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left[Ln(x+1) - Lnx - \frac{1}{(1+x)}\right] e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

لكن حسب (1)

$$\left[Ln(x+1) - Lnx - \frac{1}{(1+x)}\right] > 0$$

إذن $\grave{f}(x) > 0\,,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ و f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

- بنفس الطريقة نجد $\grave{g}(x) = \left[Ln(x+1) - Lnx - \frac{1}{x}\right] e^{xLn\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}$

و حسب (1)

$$\left[Ln(x+1) - Lnx - \frac{1}{x}\right] < 0$$

إذن $\grave{g}(x) < 0\,,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ و g متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

-3 إيجا النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}[Lnf](x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty}[Lng](x)$

$$\lim_{x\to+\infty}[Lnf](x) = \lim_{x\to+\infty} xLn\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

لحساب هذه النهاية نضع $\frac{1}{x} = y$ لدينا $y \to 0^+ \Leftrightarrow x \to +\infty$

إذن :

$$\lim_{x\to+\infty}[Lnf](x) = \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[Lng](x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}xLn\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

4- إستنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{Lnf(x)}$$

وبما أن الدالة e^x مستمرة فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to+\infty} Lnf(x)} = e^1 = e$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = e^{\lim_{x\to+\infty} Lng(x)} = e^1 = e$$

التمرين الثاني ليكن $x > 0$

نطبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $arctg$ في المجال $[0\ ,\ x]$ إذن يوجد $c \in]0\ ,\ x[$ حيث :

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{arctgx - arctg0}{x-0} = \frac{arctgx}{x}$$

إذن :

$$\frac{x}{1+c^2} = arctgx$$

وبما أن $0 < c < x$ فإن $\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$ و $\frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2}$

إذن

$$arctgx > \frac{x}{1+x^2} \quad , \forall \ \ x > 0$$

التمرين الثالث

- حساب المشتقة النونية (المشتقة من الرتبة n) للدالة $f(x) = x^2 Lnx$

نضع $u(x) = x^2$ ، $v(x) = Lnx$

لدينا $\grave{u}(x) = 2x\ ,\ U''(x) = 2\ ,\ (U)^{(k)} = 0\ ,\ \forall\ k \geq 3$

وبإستعمال

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -n\frac{1}{x^{n+1}}\ ,\ \ n > 1$$

نجد

$\grave{v}(x) = \frac{1}{x}$

$v''(x) = -\frac{1}{x^2}\quad ,\quad f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{x^3}\quad ,\quad f^{(4)}(x) = -2\,.\,3\frac{1}{x^4}\ ,\quad \ldots$

$v^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,.2\,.\ 3\,.4\ldots(n-1)\frac{1}{x^n} = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

لما $\underline{n = 1}$

$$(uv)^{(1)} = (uv)' = 2xLnx + x^2\frac{1}{x} = x(1+2Lnx)$$

لما $n = 2$

$$(uv)^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} C_2^k u^{(k)} v^{(2-k)} = C_2^0 u^{(0)} v^{(2)} + C_2^1 u^{(1)} v^{(2-1)} + C_2^2 u^{(2)} v^{(2-2)} \quad , \quad tq\ C_2^1 = 2\ , C_2^2 = 1$$

$$= uv^{(2)} + 2u'v' + u^{(2)}v = x^2.\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2.2x\frac{1}{x} + 2Lnx = 3 + 2Lnx$$

لما $n \geq 3$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}}_{=0}$$

$$= C_n^0 uv^{(n)} + C_n^1 u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^2 u^{(2)} v^{(n-2)} \quad , \qquad tq\ \ C_n^0 = 1\ , C_n^1 = n\ \ , C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

إذن

$$(uv)^{(n)} = x^2.(-1)^{n+1}(n-1)!\frac{1}{x^n} + n.2x.(-1)^n(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2}n(n-1).2.(-1)^{n-1}(n-3)!\frac{1}{x^{n-2}}$$

$$= (-1)^{n-1}.\frac{1}{x^{n-2}}[(n-1)! - 2n(n-2)! + n(n-1)(n-3)!]$$

$$= (-1)^{n-1}.\frac{(n-1)!}{x^{n-2}}\left[1 - \frac{2n}{n-1} + \frac{n}{n-2}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}.\frac{(n-1)!}{x^{n-2}}\left[\frac{2}{(n-1)(n-2)}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}.2.\frac{(n-3)!}{x^{n-2}}$$