Chapitre IV:Torsion simple

IV.1 Définition

Une poutre droite sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités de la poutre se réduisent à deux couples égaux et opposés.

IV·2 Effort interne M_t et convention de signe

En torsion, il existe un seul effort interne appelé le moment de torsion M_t. Pour le déterminer, on utilise la méthode des sections.

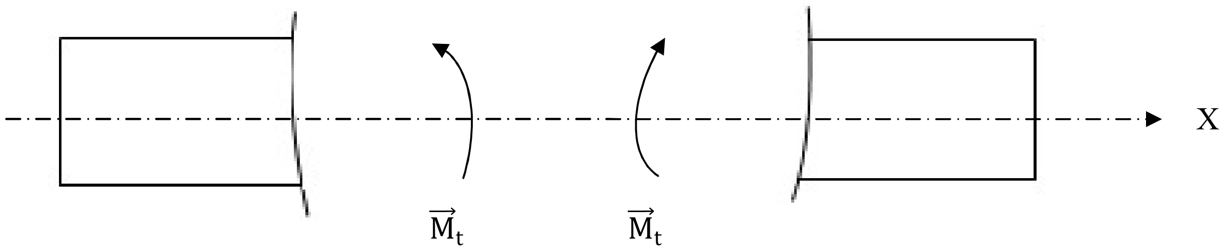


Figure (IV.1): Convention de signe de l'effort interne M_t

IV.3 Angle de torsion α, angle de torsion unitaire θ et déformation angulaire γ

Soit une poutre sollicitée en torsion.

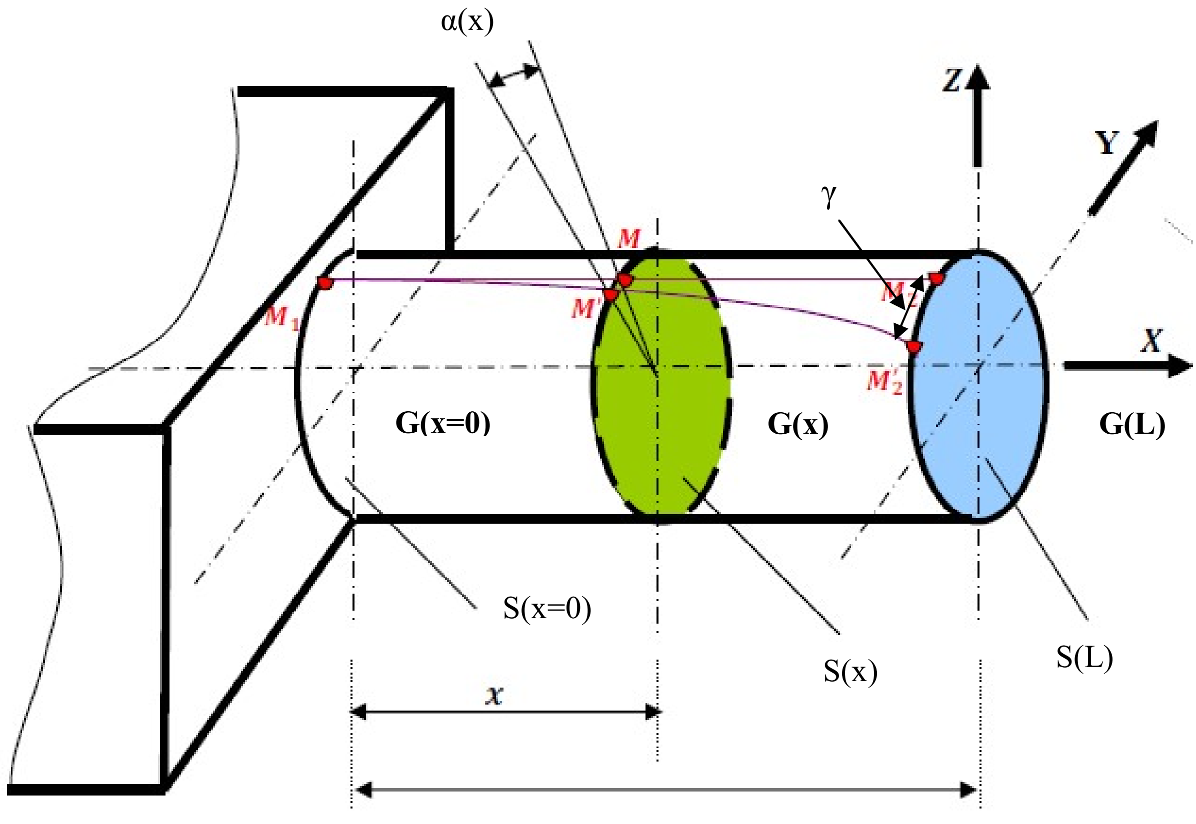


Figure (IV.2): Poutre encastrée sollicitée à la torsion

Avec:

α(x): l'angle de torsion de la section S(x)

α(L): l'angle de torsion de la section S(L)

En torsion les section de la poutre tournent et glissent les unes par rapport aux autres causé par les deux couples opposés. Donc on a un glissement qui n'est qu'un cisaillement en torsion caractérisé par une déformation angulaire γ (déformation angulaire de glissement S(x=L)/S(x=0)).

L'expérience montre que dans le domaine élastique: $\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{\alpha(L)}{L} = \text{Cte}$

Cette constante est appelée l'angle de torsion unitaire θ, d'où:

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{\alpha(L)}{L}} \quad [\frac{rd}{mm}] \quad \text{..} \quad (IV.1)$$

IV·4 Contrainte tangentielle de torsion τ

Comme nous avons un cisaillement en torsion donc:

$$\tau = G\gamma$$

D'où: $\mathrm{tg}\gamma = \gamma = \frac{M_2M_2'}{L} = \frac{R\,\alpha(L)}{L}$ avec: $\theta = \frac{\alpha(L)}{L}$

$\Rightarrow$ $\gamma = R\,\theta$

Donc: $\boxed{\tau_{max} = G.\,R\,\theta}$ ……………………………………………………………..(IV.2)

Note: la contrainte τ varie avec r, donc:

$\boxed{\tau(r) = G.\,r\,\theta}$ ………………………………..………………………(IV.3)

Et pour voir la résistance de la poutre à la torsion, on choisit τ_{max}.

IV·5 Relation de θ, α et τ avec le moment de torsion M_t

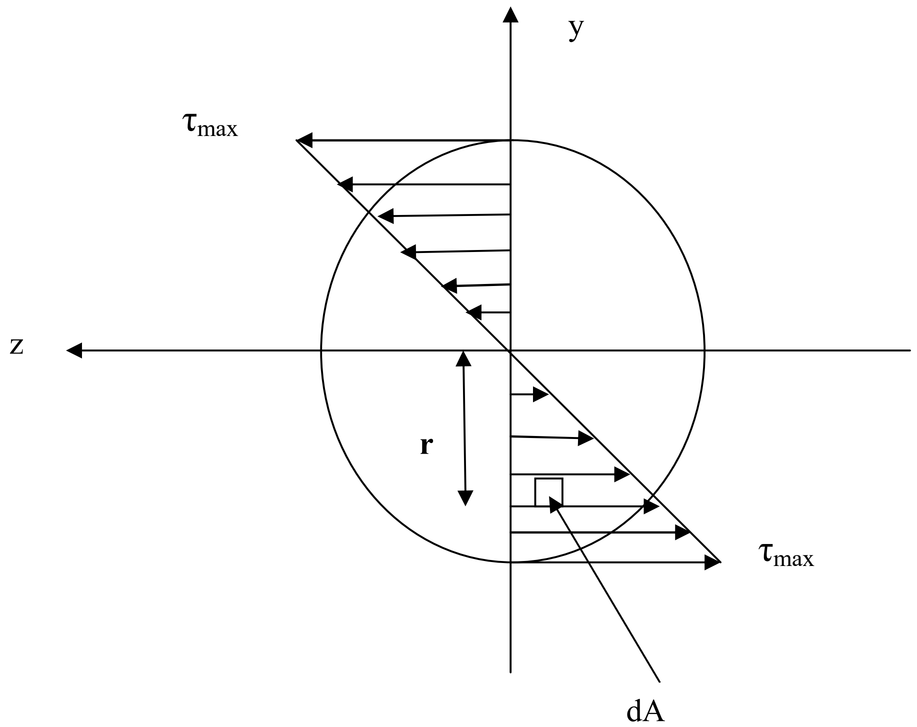


Figure (V.1): Répartition du moment de torsion M_t

On a: $M_t = F\,r \Longrightarrow M_t = \int dF\,r$

Avec: F=T=τ A $\Longrightarrow$ dF= τ dA

Donc: $M_t = \int \tau\,dA\,r$ avec: τ=G r θ, (voir relation (V.3))

$$\Longrightarrow M_t = \int G\,r\,\theta\,dA\,r \Longrightarrow M_t = G\,\theta \underbrace{\int r^2\,dA}_{I_{Gx} \text{ ou } I_G}$$

$$\Longrightarrow M_t = G\,\theta I_G$$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{M_t}{G\,I_G}} \quad \text{..(IV.4)}$$

De (V.1) et (V.4):

$$\boxed{\alpha(L) = \frac{M_t L}{G\, I_G}}$$ ……………………………..……………………(IV.5)

Ou l'angle de torsion à une distance x s'écrit:

$$\boxed{\alpha(x) = \frac{M_t\, x}{G\, I_G}}$$ ……………………………..……………………(IV.5')

Remarque:

L'angle de torsion à une distance x=x2 est égale à la somme de l'angle de torsion précédent à x=x1 et la variation de l'angle de torsion entre x=x1 et x=x2 (Δx=x2-x1) due au moment de torsion.

$$\boxed{\alpha(x = x2) = \alpha(x = x1) + \frac{M_t \Delta x}{G\, I_G}}$$ ………………………………...……………..(IV.6)

Des deux relations (V.2) et (V.4), on trouve une autre relation de τ_{max} qui est:

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax} R}{I_G}$$

Ou on écrit:

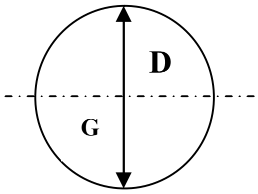
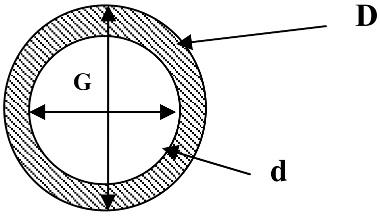
$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{\frac{I_G}{R}}$$ ………………………………...……………….(IV.7)

On constate quand $\tau_{max} \searrow$ diminue, quand $I_G \nearrow$ augmente.

I_G: appelé moment d'inertie polaire de la section de la poutre et qui est une résistance à la torsion de la poutre [mm^4].

$\frac{I_G}{R}$ [mm^3]: appelé module de la résistance de la poutre à la torsion.

On donne quelques formules de I_{Gz}:

Forme	I_{Gz}	Point du τ_{max}
	$I_G = \dfrac{\pi D^4}{32}$	$D/2$
	$I_G = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$D/2$

IV·6 Critère de résistance

Pour qu'une pièce sollicitée en torsion résiste en toute sécurité, il faut que:

$$\boxed{\tau_{max} \leq \tau_{ad}} \qquad \text{……………………………………………………….……………..........(IV.8)}$$

Avec:

τ_{max} : Contrainte maximale

τ_{ad} : Contrainte pratique ou admissible