مقدمة

قد تكون مقاييس النزعة المركزية غير كافية للمقارنة بين السلاسل الإحصائية وإعطاء صورة واضحة عنها، ولتوضيح ذلك نقدم المثال التالي الذي يبين الأجر الشهري لخمسة عائلات في ثلاث دول.

الجدول : مثال توضيحي عن أهمية مقاييس التشتت

(الوحدة 10^2 $)

	العائلة 1	العائلة 2	العائلة 3	العائلة 4	العائلة 5	المتوسط الحسابي
الدولة 1	60	58	62	61	59	60
الدولة 2	70	54	66	60	50	60
الدولة 3	72	78	46	65	39	60

الملاحظة: نلاحظ أن متوسط الأجر الشهري في الدول الثلاثة متساوي ويساوي 6000 $، لكن بالنظر لمداخيل العائلات نجدها مختلفة التجانس وبالتالي متوسط الأجر غير كافي لعملية المقارنة بين الأجور؛ وبالتالي الحاجة لمقاييس تحدد لنا درجة تجانس (تقارب) أو تشتت (تباعد) الأجور تعرف بمقاييس التشتت.

على هذا الأساس في هذه المحاضرة يتم التطرق إلى:

- المدى العام ونسبة التغير.
- المدى الربيعي والانحراف الربيعي.
- الربيعيات.
- الانحراف المتوسط وانحراف الوسيط.
- التباين والانحراف المعياري.
- معامل الاختلاف ومعامل المدى الربيعي.

1.المدى العام (Intervalle de variation ou étendue)

1.1.تعريف: هو أبسط مقاييس التشتت ويتم إيجاده عن طريق حساب الفرق بين أكبر قيمة في السلسلة وأصغرها. ويرمز له بالرمز (E)، حيث: $E = X_{Max} - X_{Min}$

مثال: بالعودة لمعطيات الجدول (4-1) أحسب المدى.

$E_1 = 62 - 58 = 4.10^2\$$ الأجور متقاربة والمتوسط الحسابي يمثلها تمثيلا مقبولا

$E_2 = 70 - 50 = 20.10^2\$$ الأجور أقل تقارب

$E_3 = 78 - 39 = 39.10^2\$$ الأجور متباعدة وبالتالي المتوسط الحسابي لا يمثلها تمثيلا جيدا

ملاحظة: في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات نحسب الفرق بين مركز الفئة الأخيرة ومركز الفئة الأولى.

2.1. مزايا وعيوب المدى

❖ **المزايا**

- ✓ بسيط وسهل الحساب.
- ✓ كثير الاستخدام عند الإعلان عن حالات الطقس ودرجات الحرارة.

❖ **العيوب**

- ✓ اعتماده على قيمتين فقط وبالتالي التأثر بالقيم الشاذة.
- ✓ لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

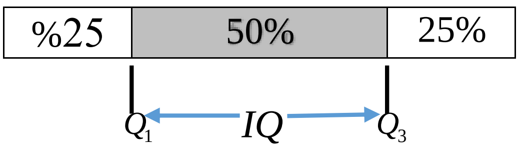
2.نسبة التغير (Rapport de variation)

تحسب نسبة التغير من خلال قسمة أكبر قيمة في السلسلة إلى أصغر قيمية في السلسلة.

3.المدى الربيعي (Intervalle interquartile)

1.3. تعريف المدى الربيعي: المدى الربيعي يقيس مدى 50% من القيم التي تقع في وسط السلسلة المرتبة تصاعديا أو تنازليا. وهو على عكس المدى (E) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة ويرمز له بـــ (IQ)، ويحسب من خلال الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول؛ أي $IQ = Q_3 - Q_1$

الشكل 4- 1: توصيف المدى الربيعي



2.3.الانحراف الربيعي: هو نصف المدى الربيعي ويرمز له بالرمز (VQ) ويحسب بالعلاقة التالية:

$$VQ = \frac{1}{2} IQ = \frac{Q3 - Q1}{2}$$

طبعا لحساب المدى الربيعي والانحراف الربيعي لا بد من حساب الربيعي الأول، الثاني والثالث.

4. الربيعيات (Quartiles)

كل مجموعة من البيانات يمكن تقسيمها إلى أربعة أقسام متساوي وهذا بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا كما هو موضح في الشكل أعلاه. يفصل بين كل قسم ما يعرف بالربيع، حيث نجد:

- ✓ الربيع الأول (Q_1) وهو القيمة التي تكون ربع القيم $(\frac{1}{4})$ أو 25% من القيم أقل منها.
- ✓ الربيع الثاني وهو الوسيط.
- ✓ الربيع الثالث(Q_3) وهو القيمة التي تكون $(\frac{3}{4})$ أو 75% من القيم أقل منها.

1.4.حساب الربيعيات في حالة السلاسل الإحصائية

1.1.4. طريقة العدد الصحيح (entier): تتعلق هذه الطريقة برتبة الربيعي$(Rq = np)$ كما يلي:

- ✓ إذا كانت (np) عدد صحيح أو دائري $(np \in entier)$ يحسب الربيعي بالعلاقة التالية:

$$np \in entier \Rightarrow Q = \frac{1}{2}(X_{np} + X_{np+1})$$

- ✓ إذا كانت (np) ليس عددا صحيحا $(np \notin entier)$؛ أي عددا كسريا يتم تقريب (np) إلى العدد الصحيح الأعلى (round up). كما يلي:

$$np \notin entier \Rightarrow Q \approx X_{np/roundup}$$

مثال: لتكن لديك السلسلة التالية: S: 2,4,8,5,13,15,10

أوجد كل من Q_1, Q_2, Q_3 ؟

أولا، نرتب السلسلة: $s \nearrow: 2,4,5,8,10,13,15$

- ✓ حساب Q_1

$$Rq_1 = np = n.(\frac{1}{4}) = \frac{7}{4} = 1.75 \notin entier$$
$$Q_1 = X_{1.75} \approx X_2 = 4$$

- ✓ حساب Q_2

$$Rq_2 = n.(\frac{2}{4}) = \frac{14}{4} = 3.5 \notin entier$$
$$Q_2 = X_{3.5} \approx X_4 = 8$$

✓ حساب Q_3

$$Rq_3 = n.(\frac{3}{4}) = \frac{21}{4} = 5.25 \notin entier$$

$$Q_3 = X_{5.25} \approx X_6 = 13$$

2.1.4.طريقة حساب الوسيط (Me): تعرف هذه الطريقة من خلال حساب وسيط السلسلة، هذا الأخير يقسم السلسلة إلى سلسلتين جزئيتين (S1 ,S2)، بعد ذلك نقوم بحساب الوسيط لكل من السلسلتين.

مثال: لتكن لديك السلسلة المرتبة التالية: $S\nearrow$:12,13,15,16,18,19,22,24,25,27,28,34.

أوجد كل من Q_1, Q_2, Q_3 ؟

✓ أولا نقوم بحساب الوسيط Me والذي هو نفسه Q_2. لدينا (N=12) إذن:

$$Me = \frac{1}{2}(X_6 + X_7) = \frac{1}{2}(19+22) = 20.5$$

إذن تتكون لدينا :

12 13 15 16 18 19   20.5   22 24 25 27 28 34

S1   S2

✓ نقوم بحساب الوسيط لكلا السلسلتين الجديدتين S1, S2.

✓ فيما يخص S1:
$$Me_{S1} = \frac{1}{2}(X_3 + X_4) = \frac{1}{2}(15+16) = 15.5$$

✓ فيما يخص S2:
$$Me_{S2} = \frac{1}{2}(X_3 + X_4) = \frac{1}{2}(25+27) = 26$$

✓ إذن: $Q_1=15.5$ $Q_2=20.5$ $Q_3=26$

2.4.حساب الربيعيات في حالة البيانات المبوبة على شكل قيم (Par valeur)[1]

مثال: لتكن لديك السلسلة التالية:

S : 4,13, 6, 4,13, 17,7,15,7,16,9, 6,7,1,3,9,14,1,1,12, 11, 20,16,15,11,6, 11

نلاحظ وجود قيم مكررة ولهذا من الأحسن عمل جدول تكراري وتبويب البيانات على شكل قيم كما يلي:

x_i	1	3	4	6	7	9	11	12	13	14	15	16	17	20
n_i	3	1	2	3	3	2	3	1	2	1	2	2	1	1
$N_i\uparrow$	3	4	6	9	12	14	17	18	20	21	23	25	26	27

$$Rme = \frac{n}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

[1] Série groupée par valeurs.

- ✓ رتبة الربيع الأول $\left(Rq_1 = n.(\frac{1}{4}) = \frac{27}{4} = 6.75\right)$ توجد في التكرارا الصاعد 9، وبالتالي $(Q_1=6)$.
- ✓ رتبة الوسيط أو الربيع الثاني $\left(Rq_2 = n.(\frac{1}{2}) = \frac{27}{2} = 13.5\right)$ توجد في التكرار الصاعد 14 وبالتالي $(Q_2=9)$.
- ✓ رتبة الربيع الثالث $\left(Rq_3 = n.(\frac{3}{4}) = \frac{81}{4} = 20.25\right)$ توجد في التكرار الصاعد 21، وبالتالي $(Q_3=14)$.

3.4.حساب الربيعيات في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات

في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات يستعمل نفس قانون حساب الوسيط للبيانات المبوبة على شكل فئات مع استبدال رتبة الوسيط بـــ:

$$Rme = \frac{n}{2} \rightarrow Rq_1 = \frac{n}{4}$$
$$Rme = \frac{n}{2} \rightarrow Rq_2 = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$$
$$Rme = \frac{n}{2} \rightarrow Rq_3 = \frac{3n}{4}$$

ومن تم تطبيق القانون التالي:

$$Q_1 = B_{\inf} + \left(\frac{Rq - N_i \uparrow (X_{i-1})}{n_q}\right).L =$$

5.الانحراف المتوسط والانحراف الوسيط

1.5.إنحراف المتوسط (L´écart moyen absolu): هو المتوسط الحسابي لفروقات القيم عن متوسطها الحسابي بالقيمة المطلقة.

يحسب بالعلاقة التالية:

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|(X_i - \bar{X})\right|}{N}$$

ملاحظة: في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات فيحسب بالعلاقة التالية:

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left|(X_i - \bar{X})\right|}{N}$$

حيث أن:

n_i يمثل تكرار الفئة و X_i يمثل مركز الفئة

2.5.إنحراف الوسيط (L´écart médian absolu): هو المتوسط الحسابي لفروقات القيم عن وسيطها (Me) بالقيمة المطلقة، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$E_{Me}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|(X_i-Me)\right|}{N}$$

ملاحظة: في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات فيحسب بالعلاقة التالية:

$$E_{Me}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i\left|(X_i-Me)\right|}{N}$$

حيث أن:

n_i يمثل تكرار الفئة و X_i يمثل مركز الفئة

3.5.مزايا وعيوب الانحراف المتوسط

- ✓ يأخذ كل القيم في الحسبان.
- ✓ يصعب التعامل معه رياضيا؛ أي لا يخضع للعمليات الرياضية.

6. التباين والانحراف المعياري

1.6.التباين (la Variance): هو متوسط مربعات انحرافات (فروقات) القيم عن متوسطها الحسابي، يرمز له بالرمز (V(x)) ويحسب بالعلاقة التالية:

❖ في حالة السلسلة الإحصائية (بيانات غير مبوبة):

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{N}$$

❖ في حالة البيانات المبوبة:

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\bar{X})^2}{N}$$

حيث أن: n_i يمثل تكرار الفئة و X_i يمثل مركز الفئة

2.6.التباين بالعلاقة الموسعة[2]: يمكن حساب التباين من خلال العلاقة الموسعة والتي يتم الوصول إليها كما يلي:

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{N}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2)$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}=n$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}.\bar{X}+\bar{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}^2+\bar{X}^2$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$$

[2] la formule développée

إذن التباين باستعمال العلاقة الموسعة يحسب كما لي: $V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$

3.6.الانحراف المعياري[3] **(L'écart-type)**: هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، يرمز له بالرمز (σ_X)
ويحسب بالعلاقة التالية:

- في حالة السلسلة الإحصائية: $\sigma_X=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{N}}$
- في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات: $\sigma_X=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\bar{X})^2}{N}}$

حيث أن:

n_i يمثل تكرار الفئة و X_i يمثل مركز الفئة

k عدد الفئات

يتم استعمال وتفسير الانحراف المعياري كما يلي:

- ✓ إذا كان σ_X منخفض (ضعيف) نقول أن القيم تتركز حول المتوسط الحسابي.
- ✓ إذا كان σ_X مرتفع فهذا يعني أن القيم تتشتت حول المتوسط الحسابي.

4.6 مزايا وعيوب الانحراف المعياري.

- ✓ أكثر مقاييس التشتت استعمالا، سهل التعامل معه رياضيا ويأخذ كل القيم في الاعتبار.
- ✓ من العيوب التأثر بالقيم الشاذة.

[3]La racine carrée de la variance

7.مقاييس التشتت النسبية

من عيوب مقاييس التشتت أن وحدات قياسها نفس وحدات قياس البيانات، على هذا الأساس لا يمكن استخدام هذه المقاييس في المقارنة بين البيانات من حيث مدى التشتت أو التجانس. فعلى سبيل المثال تجانس أو تشتت أجور العمال في الجزائر دولة يقاس بالدينار (DZ) بينما في دولة أخرى يقاس بعملة تلك الدولة، وبالتالي تصبح المقارنة غير ممكنة مما تطلب وجود مقاييس تشتت نسبية.

1.7.معامل الاختلاف (Le coefficient de variation): يعرف بأنه النسبة المئوية للانحراف المعياري على المتوسط الحسابي، يرمز له بالرمز (CV) ويحسب بالعلاقة التالية:

$$CV = \frac{\sigma_X}{\bar{X}} \times 100$$

2.7.معامل المدى الربيعي: ويعرف كذلك بالمدى الربيعي النسبي ويرمز له بالرمز (CIQ) ويحسب بالعلاقة التالية:

$$CIQ = \frac{Q3 - Q1}{Me}$$

مثال: أي الظاهرتين أكثر تشتتا إذا علمت أن:

- ✓ متوسط الأجور هو $13 .10^3$ دج والانحراف المعياري هو $4.65 .10^3$.
- ✓ متوسط المصروفات هو $5 .10^3$ دج والانحراف المعياري هو $2 .10^3$.

الأجور	المصروفات
$\bar{X} = 13 \times 10^3$	$\bar{X} = 5 \times 10^3$
$\sigma_X = 4.65 \times 10^3$	$\sigma_X = 2 \times 10^3$
$CV = \frac{\sigma_X}{\bar{X}}.100$	$CV = \frac{\sigma_X}{\bar{X}}.100$
$CV = \frac{4.65 \times 10^3}{13 \times 10^3}.100 = 35.77\%$	$CV = \frac{2 \times 10^3}{5 \times 10^3}.100 = 40\%$

بما أن معامل اختلاف المصروفات أكبر من معامل اختلاف الأجور فإن المصروفات أمكثر تشتتا

8.مثال تطبيقي 3: بالعودة للمثال التطبيقي 2، أحسب:

- ✓ انحراف المتوسط.
- ✓ التباين والانحراف المعياري، ثم معامل الاختلاف.
- ✓ أحسب Q3, Q2, Q1.
- ✓ أحسب المدى الربيعي ثم معامل الانحراف الربيعي.

الحل:

Classes	n_i	$n_i\left\|x_i-\bar{X}\right\|$	$(x_i-\bar{X})^2$	$n_i(x_i-\bar{X})^2$	$N_i\uparrow$
[140-145[	1	16.7	278.89	278.89	1
[145-150[	1	11.7	136.89	136.89	2
[150-155[	9	60.3	44.89	404.01	11
[155-160[	17	28.9	2.89	49.13	28
[160-165[	16	52.8	10.89	174.24	44
[165-170[	3	24.9	68.89	206.67	47
[170-175[	3	39.9	176.89	530.67	50
المجموع	50	235.2	720.23	1780.5	-

1.8.انحراف المتوسط

$$E_{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i\left|(X_i-\bar{X})\right|}{N}=\frac{235.2}{50}=4.70$$

2.8.التباين، الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف

التباين

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\bar{X})^2}{N}=\frac{1780.5}{50}=35.61$$

الانحراف المعياري

$$\sigma_X=\sqrt{V(x)}=\sqrt{35.61}=5.97$$

معامل الاختلاف

$$CV=\frac{\sigma_X}{\bar{X}}\times 100$$

$$Cv=\frac{5.97}{159.2}\times 100=3.75\%$$

3.8.حساب Q_1,Q_2,Q_3

- ✓ حساب Q_1

لدينا رتبة الربيع الأول: $Rq_1=\frac{n}{4}=\frac{50}{4}=12.5$

إذن $Q_1\in[155,160[$

$$Q_1 = B_{\inf} + \left(\frac{Rq_1 - N_i \uparrow (X_{i-1})}{n_{q_1}} \right).L = 155 + \frac{12.5-11}{17} \times 5 = 155.44cm$$

- ✓ حساب Q2 وهو نفسه Me؛ $Q_2 = Me = 159.11cm$
- ✓ حساب Q_3

لدينا رتبة الربيع الثالث: $Rq_3 = \frac{3n}{4} = \frac{50}{4} = 37.5 \Rightarrow Q_3 \in [160,165[$

$$Q_3 = B_{\inf} + \left(\frac{Rq_3 - N_i \uparrow (X_{i-1})}{n_{q_3}} \right).L = 160 + \frac{37.5-28}{16} \times 5 = 162.96cm$$

4.8.المدى الربيعي ومعامل الانحراف الربيعي

المدى الربيعي

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 162.96 - 155.44 = 7.52$$

معامل المدى الربيعي

$$CIQ = \frac{Q_3 - Q_1}{Me} = \frac{7.52}{159.11} = 0.0472 = 4.72\%$$