Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021 Matière : *Analyse 03*

Solutions de Td N^0 : 1 (Séries Numériques)

Solution de l'éxercice n°1

Montrons que les séries numériques proposées sont convergentes et calculons leurs sommes :

1. On a $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, ce qui implique :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Par suite $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge et a pour somme $S = 1$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e.\end{aligned}$$

Par suite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!}$ converge et a pour somme $S = 1$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{2^n} &= Réel\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{\exp(ix)}{2}\right)^n\right) \\ &= Réel\left(\frac{2}{2+\exp(ix)}\right) = \frac{4+2\cos x}{5+4\cos x}.\end{aligned}$$

Par suite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{\cos(nx)}{2^n}$ converge et a pour somme $S = \dfrac{4+2\cos x}{5+4\cos x}$.

Solution de l'exercice n°2

Etudions la nature des séries numériques proposées :

1. On a $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1 \neq 0$, ce qui montre la divergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sin(\frac{1}{n})$.

2. On a : $\arctan(\frac{1}{n^2}) \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente (série

de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\frac{1}{n^2})$ converge.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} + \alpha^n + 1}$ $(\alpha \geq 0)$. Posons $u_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} + \alpha^n + 1}$.

3.1. Si $\alpha = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$, la série proposée est donc convergente.

3.2. Si $\alpha = 1$, $u_n = \frac{1}{3} \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.

3.2. Si $\alpha \in]0,1[$. On considère la série géométrique de terme général $v_n = \alpha^n$, qui est convergente.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sont donc de la même nature, ce qui montre la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

3.4. Si $\alpha > 1$.On considère la série géométrique de terme général $v_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ qui est convergente.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sont donc de la même nature, ce qui montre la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
4. En utilisant le critère de Cauchy, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n = \exp(a-b).$$

Par suite :

4.1. Si $a < b, \exp(a-b) < 1$, la série est donc convergente.

4.2. 4.1. Si $a > b, \exp(a-b) > 1$, la série est donc divergente.

4.3. Si $a = b, u_n = 1 \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.
5. On a $\frac{\ln(n)}{n^2+2} < \frac{\ln(n)}{n^2}$, terme général d'une série de Bertrand qui est convergente, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+2}$ est donc convergente.
6. Posons $u_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)}$, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

D'après d'Alembert, on ne peut rien conclure. En utilisant le critère de Raab Duhamel, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Par suite $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)}$ est divergente.

<u>Solution de l'exercice n°3</u>

1. Montrons que la série numérique de terme général : $u_n = \dfrac{\exp(inx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$ est convergente pour tout $x \neq 2k\pi$.

En effet :

1.1. Si $x = 2k\pi$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ terme général de la série harmonique qui est divergente.

1.2. Si $x \neq 2k\pi$. on peut reécrire $u_n = a_n \times b_n$, où $a_n = \exp(inx)$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$. On

a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\exp(ikx)\right| = \left|\exp(ix)\times\left(\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)\right| \leq \left|\frac{2}{1-\exp(ix)}\right| = \frac{2}{|1-\cos x - i\sin x|} \\
&= \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\times\left|\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.
\end{aligned}$$

D'autre part, la suite (b_n) est décroissante et tend vers zéro, donc d'après Abel la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\exp(inx)}{n}$ est convergente.

2. Etudions selon la valeur de θ, la convergence absolue de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}\theta^n$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Posons $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}\theta^n$. En utilisant le critère de Cauchy des séries absolument convergentes, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = 4\,|\theta|\,.$$

Par suite :

2. 1. Si $|\theta| < \frac{1}{4}$, la série proposée est donc absolument convergente.

2. 2. Si $|\theta| > \frac{1}{4}$, la série proposée est donc divergente.

3. 3. Si $|\theta| = \frac{1}{4}$, le terme général devient

$$u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^{2n},$$

quantité qui tend vers $\exp(-3) \neq 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.

<u>Exercice n°4</u>

Considèrons la série numérique de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

1. Montrons que :Montrons que : si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente. En effet : Si $\alpha > 1$, on a $|u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$, terme d'une série converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

2. Si $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n)}{2n^\alpha} = v_n.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^\alpha}$ converge (d'après Abel), la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est donc divergente, on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ne converge pas absolument. Mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge d'après Abel, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est semi convergente.

3. Par contre, si $\alpha \leq 0$, la série est divergente.

En effet, si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est alors divergente.