Table des matières

Chapitre 1

Fonctions continues

1.1 *Fonctions continues en un point*

Définition 1.1.1 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* I *un intervalle quelque de* $\mathbb{R}$*, et Soit* $x_0 \in I$.

1. *On dit que* f *est continue en* $x_0 \in I$ *si:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *c'est-à-dire:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. *On dit que* f *est continue à droite en* $x_0 \in I$ *si:* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ *c'est-à-dire:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. *On dit que* f *est continue à gauche en* $x_0 \in I$ *si:* $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ *c'est-à-dire:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I; -\delta < x - x_0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.1 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* $x_0 \in I$.

$$(f \text{ est continue en } x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 1.1.1 *:*

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x$

f *est continue en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$.

en effet, soit $\varepsilon > 0$, *on a:*

$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ *c'est-à- dire* $\exists\delta > 0, |x - x_0| < \delta$

donc il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sin x$

f *est continue en tout point* x_0 *dans* $\mathbb{R}$.*C'est-à- dire*

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

soit $\varepsilon > 0$, *on a:*

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |\sin x - \sin x_0| \\
&= \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \\
&\leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < \varepsilon \Longrightarrow |x - x_0| < \varepsilon
\end{aligned}$$

donc δ *existe et il suffit de prendre* $\delta = \varepsilon$.

3) $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$

f *est continue en tout point* x_0 *dans* $\mathbb{R}_+$.*C'est-à- dire*

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, *on a:*

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &\Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \\
&\Longrightarrow |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}
\end{aligned}$$

donc δ *existe et il suffit de prendre* $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$.

Théorème 1.1.2 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* $x_0 \in I$.

(f *est continue en* x_0) $\Longleftrightarrow \forall$ *la suite* $x_n \in I$ *convergente vers* x_0 *alors la suite* $f(x_n)$ *convergente vers* $f(x_0)$.

i.e: $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x_n \in I, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)\right)$.

1.2 *Fonctions discontinues*

Définition 1.2.1 *:*

1) *Si* f *n'est pas définie en* x_0, *alors* f *est discontinue en* x_0.

2) *Si* f *est définie au voisinage de* x_0. *On dit que* f *est discontinue en* x_0 *si:*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I; |x - x_0| < \delta \quad et \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

3) *Si* $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) \neq \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ *alors* f *est discontinue en* x_0, *et* x_0 *est un point de discontinue de première espèce.*

4) *Si l'une des deux limites* $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$ *et* $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ *ou bien les deux limites n'existe pas ou n'est pas finie, alors* f *est discontinue en* x_0 *et* x_0 *est un point de discontinue de* 2^{eme} *espèce.*

5) *Si* $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) \neq f(x_0)$, *alors* f *est discontinue en* x_0.

Exemple 1.2.1 *:*

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

f est discontinue (n'est pas continue) en tout point de $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0.$

f n'est pas définie en $0 \Longrightarrow f$ n'est pas continue en $0 \Longrightarrow f$ est discontinue.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & si \;\; x \neq 0 \\ 1 \;\; si \;\; x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{-x} = -1.$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Alors f est discontinue en $x_0 = 0$ et 0 est un point de discontinue de 1^{er}espèce.

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 2 \;\; si \;\; x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

Alors f est discontinue en $x_0 = 0$ et 0 est un point de discontinue de 2^{eme}espèce.

1.3 *Fonctions continues sur un intervalle*

Définition 1.3.1 *:*

1) *Une fonction f définie sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ est dit continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

2) *Une fonction f définie sur l'intervalle fermé $I = [a, b]$ est dit continue sur I si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b.*

3) *L'ensemble des fonctions continues sur I se note $C(I)$.*

1.4 *Continue uniforme d'une fonction sur un intervalle*

Définition 1.4.1 *:*

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite ***uniformément*** *continue sur I si:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x', x'' \in I; |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Remarque 1.4.1 *:*

1) *La continuité uniforme est une propriété de la forme sur intervalle, alors que la continuité peut être définie en un point.*

2) *Le nombre δ ne dépend pas de ε alors que pour la continuité δ dépend de ε et de x_0.*

3) *f est uniformément continue sur $I \Longrightarrow f$ est continue sur I.*

4) *On dit que f n'est pas uniformément continue sue I si:*

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x', x'' \in I; |x' - x''| < \delta \text{ et } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Exemple 1.4.1 *: $f(x) = x$ et $g(x) = \sin x$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$ (on trouve $\delta = \varepsilon$).*

1.5 *Opérations sur les fonctions continues*

Il résulte de théorème sur les limites que si f et g sont définis sur même intervalle I et continue au point $x_0 \in I$. Alors les fonctions $f+g, f\times g, \alpha f\ (\alpha \in \mathbb{R}), \dfrac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $|f|$ sont continues au point x_0.

- *Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Si f est continue au point $x_0 \in I$ et g est continue au point $y_0 = f(x_0) \in J$ alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue au point $x_0 \in I$

1.6 *Prolongement par continuité*

Définition 1.6.1 *:*

Soit f *une fonction définie et continue sur* $I/\{x_0\}$, *si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *(*l *existe et finit) alors peut être prolongé par continuité au point* x_0 *à la fonction* g *définie par:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \quad si \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \quad si \quad x = x_0 \end{cases}$$

Dans ce cas g *est continue sur* I.

Exemple 1.6.1 *:*

1) $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$

f *et continue sur* $\mathbb{R}/\{0\}$.

On a: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \cos \dfrac{1}{x} = 0 \left(\text{parce que } \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \text{ et } \cos \dfrac{1}{x} \text{ est bornée} \right)$.

Donc f *est prolongeable par continue au point* $x_0 = 0$ *à la fonction* g *définie par:*

$$g(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

donc g *continue sur* $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

f *et continue sur* $\mathbb{R}/\{0\}$ *et on a* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

donc f *n'est pas prolongeable par continuité au point* $x_0 = 0$.

1.7 *Théorème sur les fonctions continues*

Théorème 1.7.1 *: (Heine)*

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ *est uniformément continue sur* $[a, b]$.

Théorème 1.7.2 *:*

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ *est bornée sur* $[a, b]$.

i.e: $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| < +\infty$.

Remarque 1.7.1 *:*

Le théorème 1.8.2 n'est pas vrai si l'intervalle n'est pas fermé ou n'est pas borné.

Théorème 1.7.3 *:*

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ *atteint ses bornées.*

i.e: $\exists x_1, x_2 \in [a, b]\,; f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ *et* $f(x_2) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Théorème 1.7.4 *: (Des valeurs intermédiaires)*

Soit f *une fonction continue sur* $[a, b]$ *si* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont des signes contraires* $(f(a) \times f(b) < 0)$ *alors il existe au moins un point* $c \in]a, b[\,; f(c) = 0$.

Remarque 1.7.2 *:*

Le théorème peut être utilisé pour encadrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple 1.7.1 *:*

Soit $f(x) = \sin x + \cos x, [a, b] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

On a: f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc continue sur* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

On a: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$

$f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = -1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f(\pi) = 1 \times (-1) = -1 < 0$

alors $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\,; f(c) = 0$

donc l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une racine dans* $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Théorème 1.7.5 *: (Des valeurs intermédiaires 2)*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $I\,(I \subseteq \mathbb{R})$, *soient* x_1, x_2 *où* $x_1 < x_2$, *alors pour tout réel* c *strictement compris entre* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$ *il existe* $x_0 \in]x_1, x_2[$ *tel que* $f(x_0) = c$.

Preuve. *:*

Soient $x_1, x_2 \in I;\ \ x_1 < x_2$

on a: $f(x_1) < f(x_2)$ *soit donc* c, $f(x_1) < c < f(x_2)$.

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : [x_1, x_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) = f(x) - c \end{array}$$

il est évident que g *est continue sur* $[x_1, x_2]$ *car* f *est continue sur* $[x_1, x_2] \subset I$.

On a: $g(x_1) = f(x_1) - c < 0$ *et* $g(x_2) = f(x_2) - c > 0$.

alors $g(x_1) \times g(x_2) < 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[, g(x_0) = 0$.

donc $\exists x_0 \in \left]x_1, x_2\right[, f(x_0) = c$. $\blacksquare$

Corollaire 1.7.1 *:*

Soit I *un intervalle et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue alors* $f(I)$ *est un intervalle et* $f(I)$ *ensemble des valeurs de* f.

Remarque 1.7.3 *:*

1. *L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle fermé.*

2. *Si* I *n'est pas fermé alors intervalle* $f(I)$ *n'est pas nécessairement de nature de* I.

Exemple 1.7.2 *:*

1) $f(x) = x^2$, $f(\left]-1, 1\right[) = \left[0, 1\right[$.

2) $f(x) = \sin x$, $f(\left[-\pi, \pi\right[) = [-1, 1]$.

3) $f(x) = x + 2$, $f([0, 1]) = [2, 3]$.

1.8 *Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle*

Théorème 1.8.1 *:*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle quelconque. Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction monotone.*

f *est continue sur* $I \Longrightarrow f(I)$ *est un intervalle.*

Théorème 1.8.2 *:*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue alors*

f *est injective sur* $I \Longrightarrow f$ *est strictement monotone sur* I.

Théorème 1.8.3 *: (de la fonction réciproque)*

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow f(I) \subset \mathbb{R}$ *une fonction continue et strictement monotone, alors la fonction réciproque* $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ *existe et elle est continue et strictement monotone sur* $f(I)$.

1.9 *Théorème du point fixe*

Définition 1.9.1 *:*

Soit $f : I \longrightarrow I$ *et soit* $\dot{x} \in I$.

On dit que $\dot{x}$ *est un point fixe pour* f *si* $f(\dot{x}) = \dot{x}$.

Définition 1.9.2 *:*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *une fonction continue, alors* f *admet au moins un point fixe dans* $[a, b]$.

i.e: $\exists \dot{x} \in [a, b], f(\dot{x}) = \dot{x}$.