Détermination des surfaces des polygones fermés

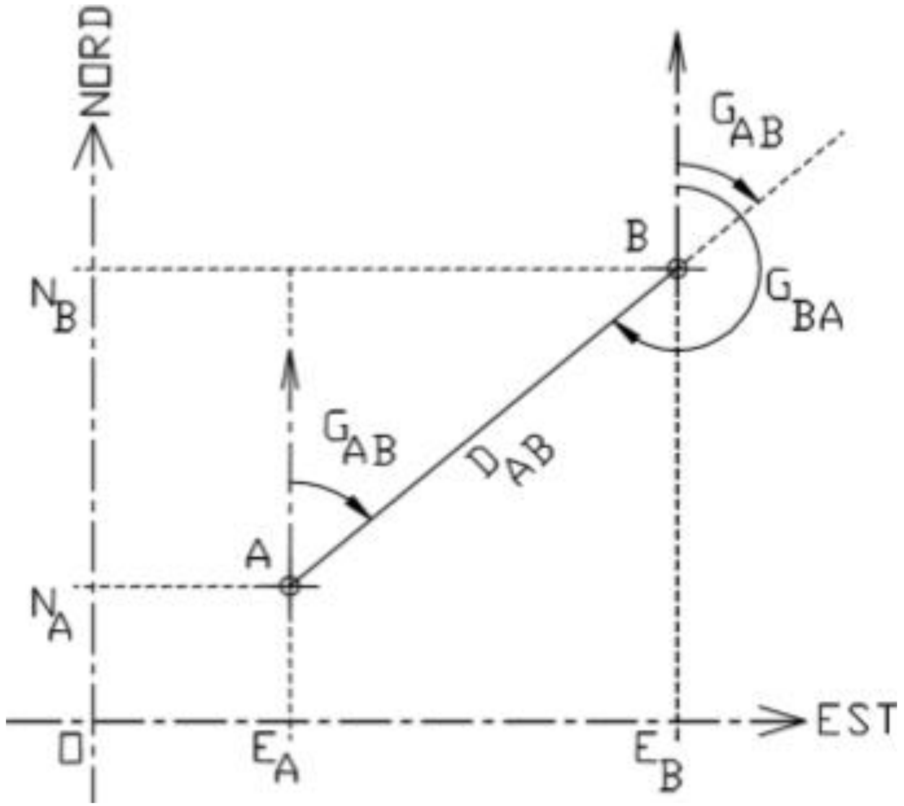
Introduction:

Les processus de calcul des superficies, à partir de cartes ou de la nature, sont considérés comme des opérations de base dans la topographie. La précision du calcul de la surface dépend de la précision de la mesure. Bien que la méthode la plus précise de calculer les surfaces soit la mesure directement des longueurs et des angles dans la nature pour la forme de sa surface trouvée. Sauf que la mesure provient de la carte c'est la plus courante dans les calculs des surfaces. Cela est dû à la facilité de mesure à partir de la carte, malgré les erreurs possibles lors de son dessin.

Le calcul de la surface varie en fonction des données et de la forme des surfaces que nous voulons calculer, elle peut prendre la forme de géométrique régulière ou irrégulière. Dans ce chapitre, nous allons montrer les méthodes de calcul pour détermine la surface d'un polygone fermé il faut connaitre les coordonnées (cartésiennes, polaires) ou les distances et les gisements de ce polygone. Donc nous allons commencer pour calculer les angles « **Gisement** ».

Définition :

Le Gisement d'une direction AB est l'angle horizontal mesuré positivement dans le sens horaire entre l'axe des ordonnées du système de projection utilisé et cette direction AB. On le note G_{AB} .

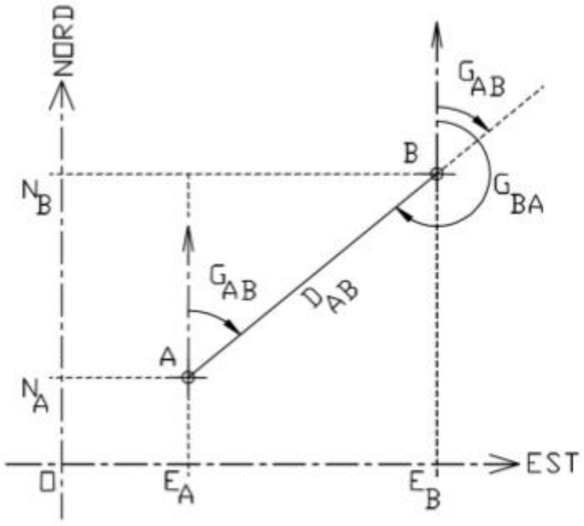


Mathématiquement, c'est l'angle positif en sens horaire entre l'axe des ordonnées du repère et la droite (AB). Un gisement est toujours compris entre 0 et 400 grades.

G_{AB} est l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction AB.
G_{BA} est l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction BA.

La relation qui lie G_{AB} et G_{BA} est :

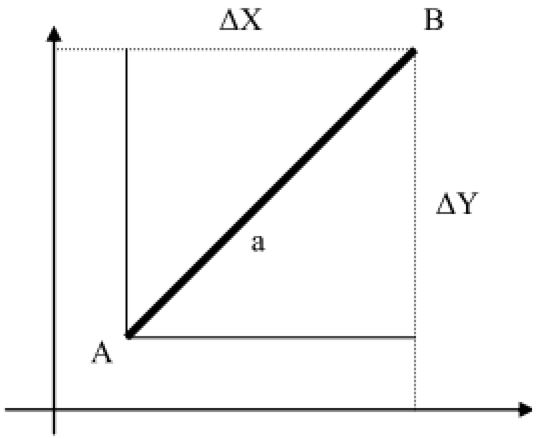
$$\boxed{G_{BA} = G_{AB} + 200}$$



1. Calcul d'un gisement à partir de coordonnées cartésiennes

Considérons les coordonnées de deux points $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$ (figures suivantes).

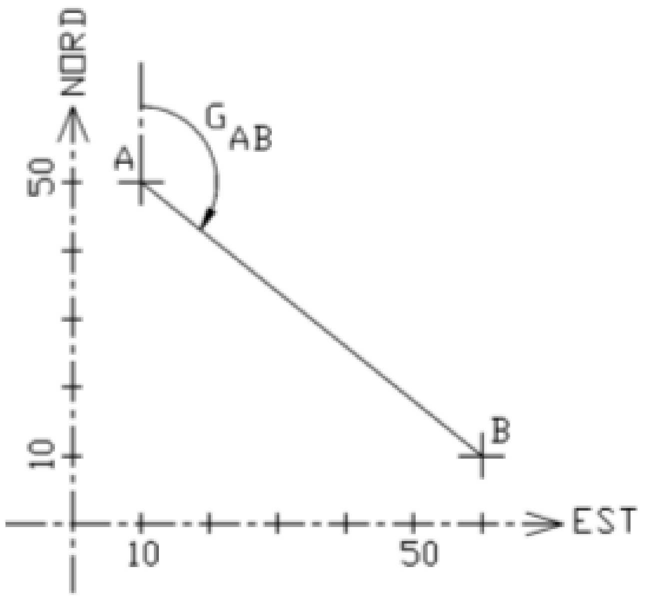
La distance D_{AB} se calcul comme suit:



$$\boxed{D_{AB} = \sqrt{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$$

Application

Calculez le gisement de la direction AB suivante:



Solution

Les coordonnées A(10 ; 50) et B (60 ; 10)

$$\Delta X = X_B - X_A = 60 - 10 = +50$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A = 10 - 50 = -40$$

$$G_{AB} = tg^{-1}\left(\frac{50}{-40}\right) = -57.045\ gr$$

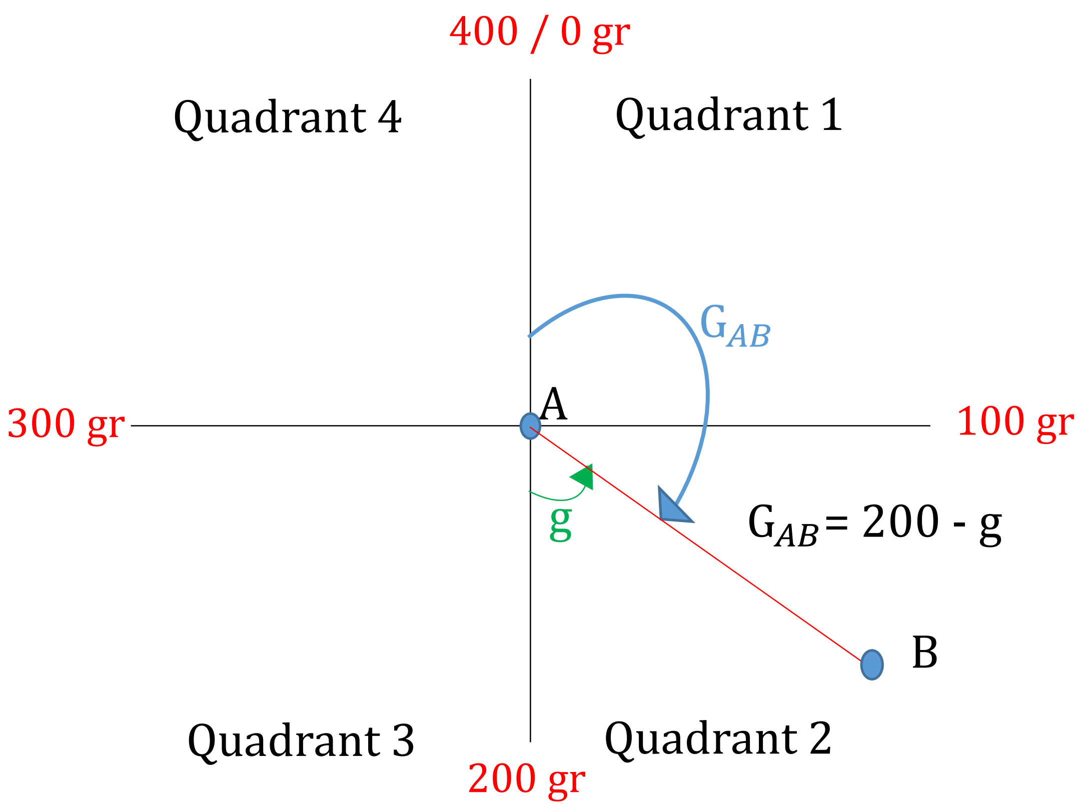
En observant le schéma des points A et B dans la figure 2, on s'aperçoit de l'incohérence de ce résultat. L'angle donné n'est visiblement pas égal à –57,045 gr.

En fait, la calculatrice donne la valeur de l'angle auxiliaire **g** (figures). Pour obtenir $\mathbf{G_{AB}}$, il faut donc tenir compte de la position du point B par rapport au point A ; on parle de quadrants:

* **Quadrant 2 :** B est à l'est et au sud de A

$(\Delta X > 0)$ et $(\Delta Y < 0)$

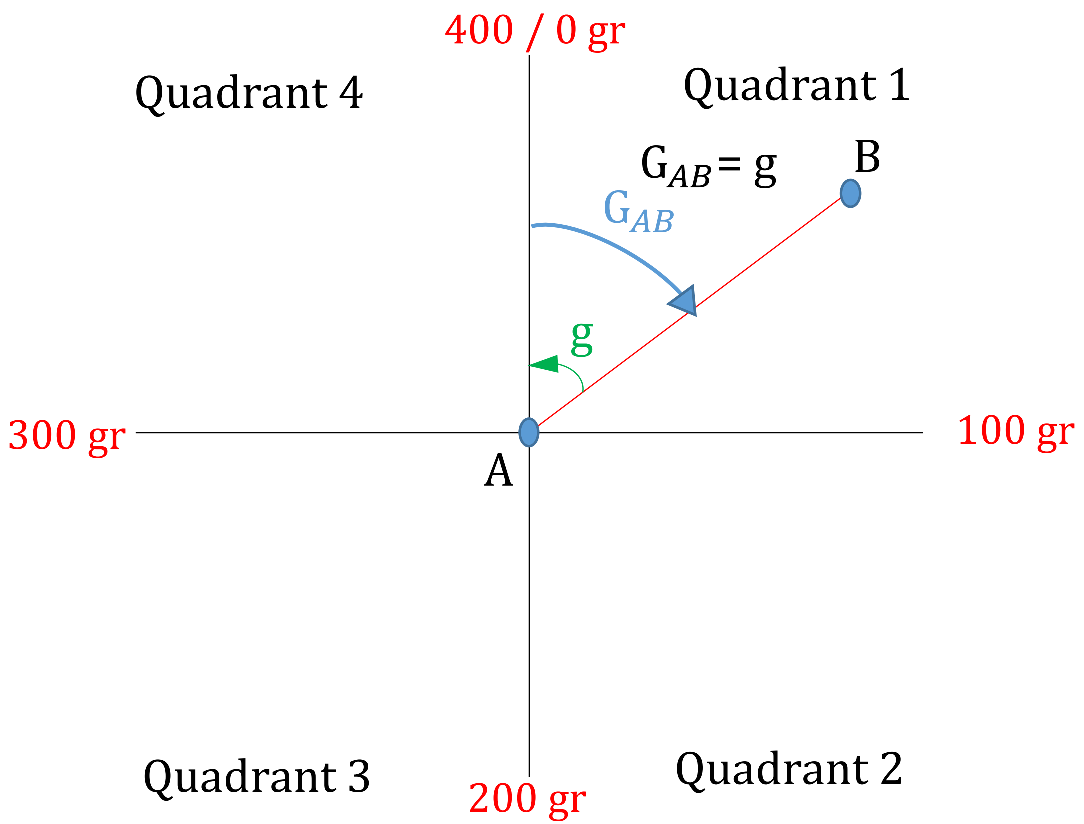
$$\boxed{G_{AB} = 200 - g}$$



* **Quadrant 1 :** B est à l'est et au nord de A

$(\Delta X > 0)$ et $(\Delta Y > 0)$

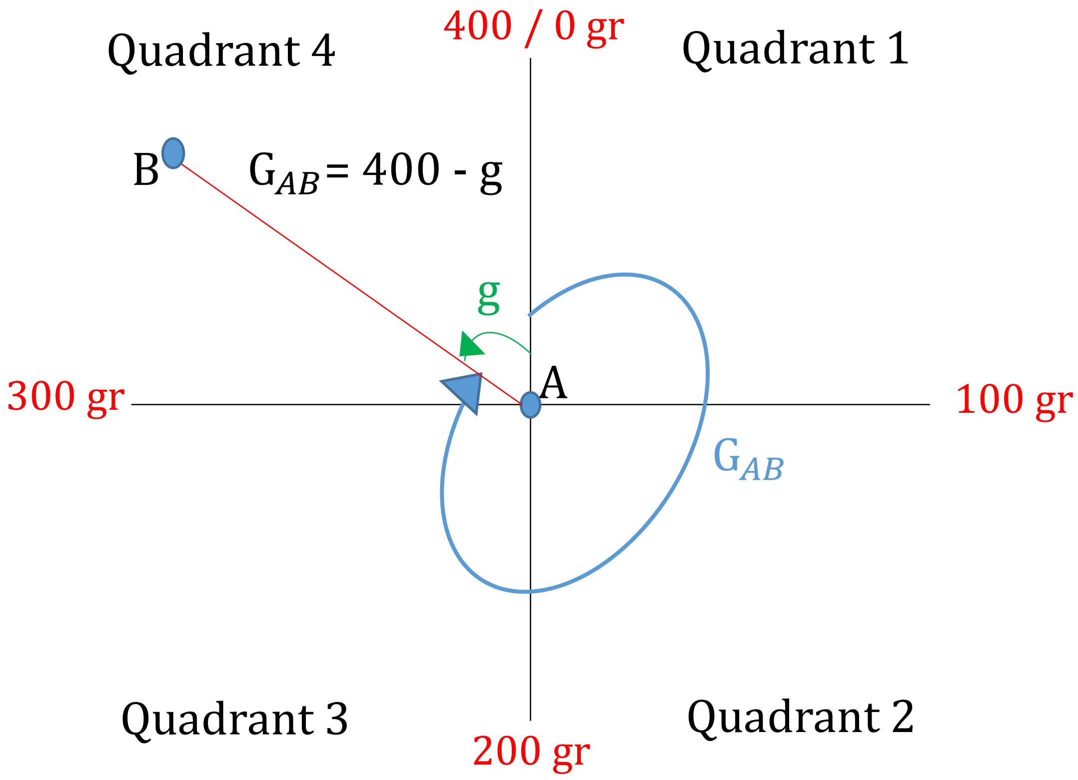
$$\boxed{G_{AB} = g}$$



*** Quadrant 4 :** B est à l'Ouest et au Nord de A

$(\Delta X < 0)$ et $(\Delta Y > 0)$

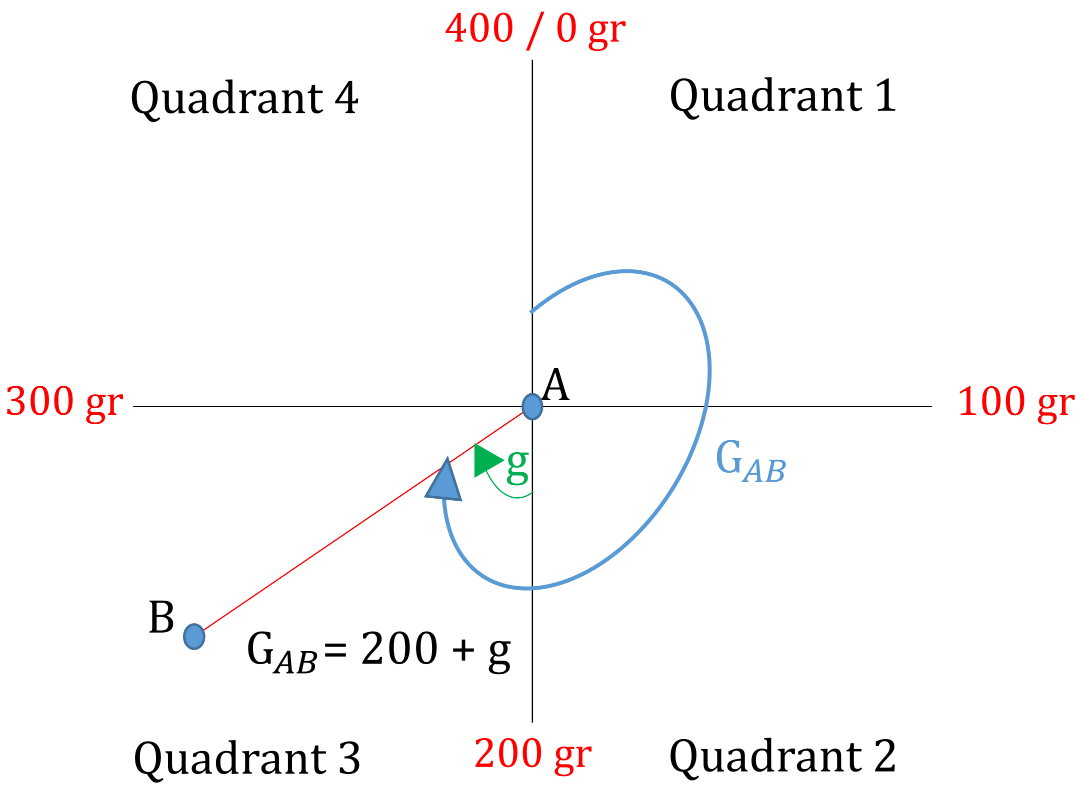
$\boxed{G_{AB} = 400 - g}$



*** Quadrant 3 :** B est à l'Ouest et au Sud de A

$(\Delta X < 0)$ et $(\Delta Y < 0)$

$\boxed{G_{AB} = 200 + g}$



La relation suivante permet de calculer l'angle auxiliaire **g**

$$tg\ \mathbf{g} = \left|\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right| = \left|\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right|$$

qui est un angle inférieur à 100 grades que forme la direction AB avec l'axe de Y

Résumé: les quatre cas comme suit

- la direction AB est située dans le 1er quadrant, $\boxed{\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{g}}$
- la direction AB est située dans le 2eme quadrant, $\boxed{\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{200 - g}}$
- la direction AB est située dans le 3eme quadrant, $\boxed{\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{200 + g}}$
- la direction AB est située dans le 4eme quadrant, $\boxed{\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{400 - g}}$

2. Calcul de coordonnées cartésiennes à partir d'un gisement

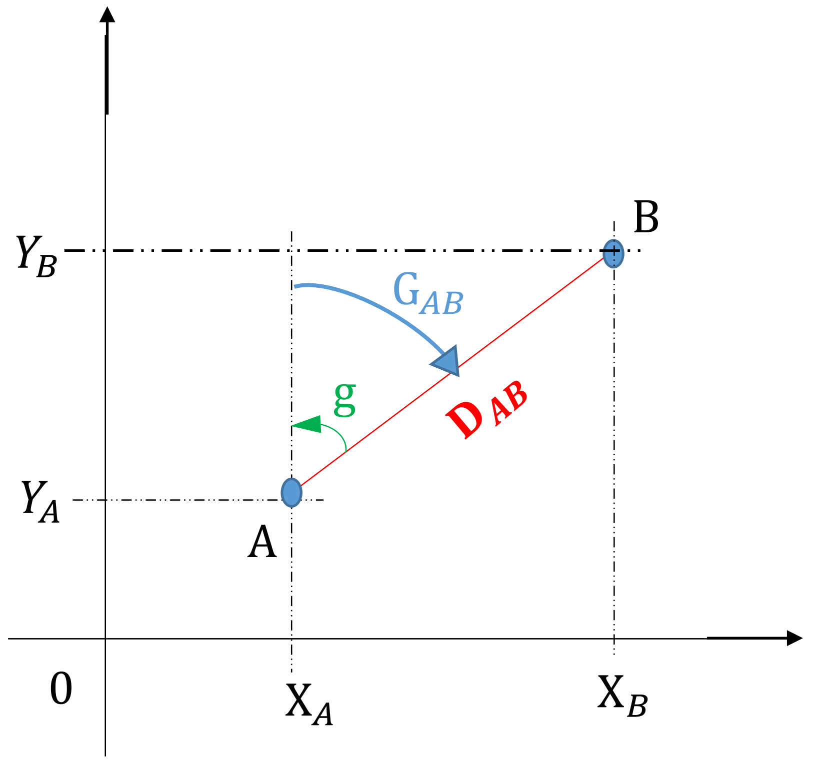
Connaissant le point de station A (X_A, Y_A), et cherchant les coordonnées d'un point B visible depuis A.

On dit que le point B est rayonné depuis A si l'on peut mesurer la distance horizontale D_{AB} et le gisement G_{AB}.

Quel que soit le quadrant, on peut alors calculer les coordonnées du point B par les formules suivantes :

$$X_B = X_A + D_{AB} \,.\, \sin G_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + D_{AB} \,.\, \cos G_{AB}$$



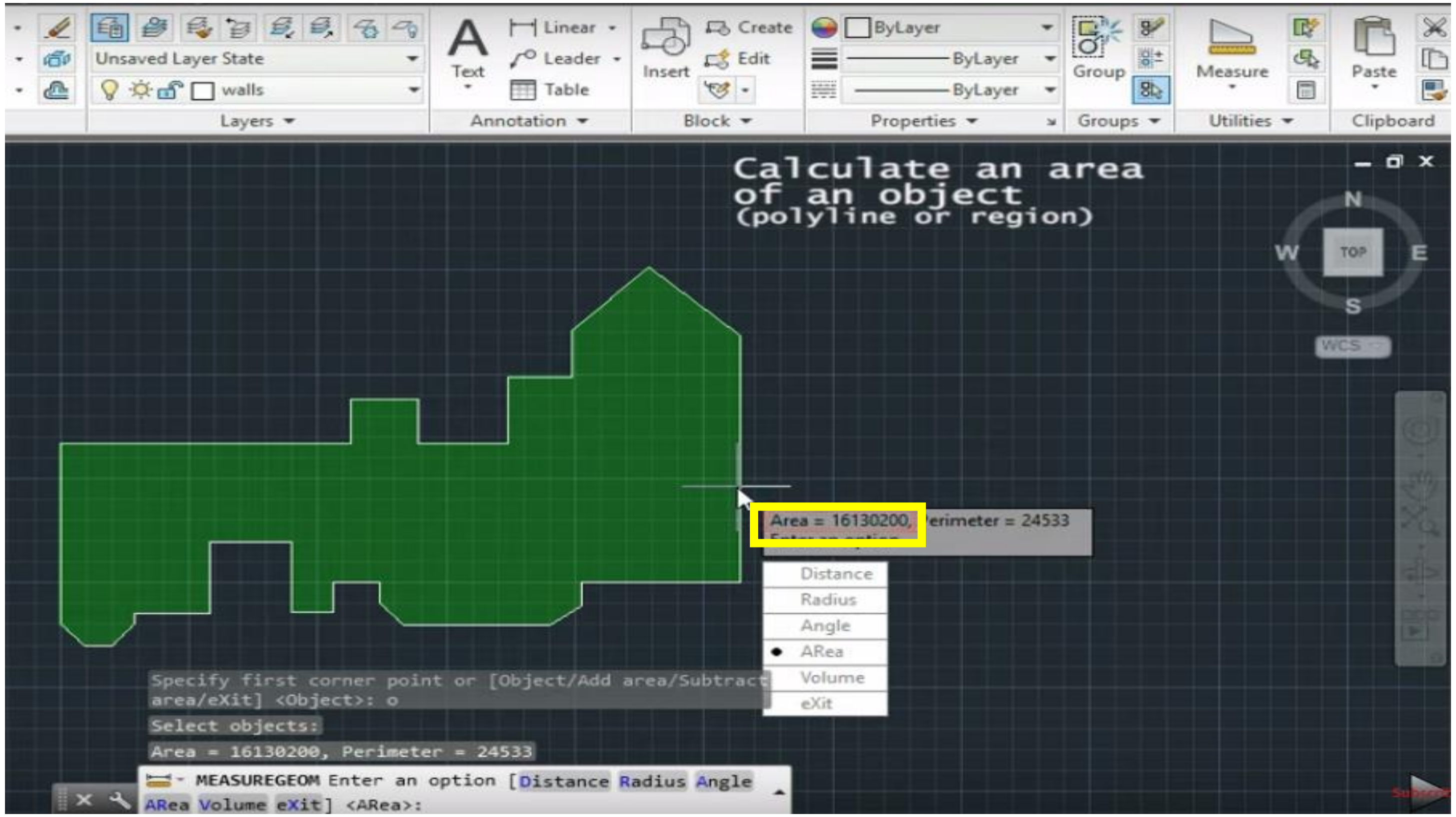
Calcul de coordonnées

Superficies

Il existe plusieurs méthodes de calcul de l'aire de différentes manières Parmi ces méthodes

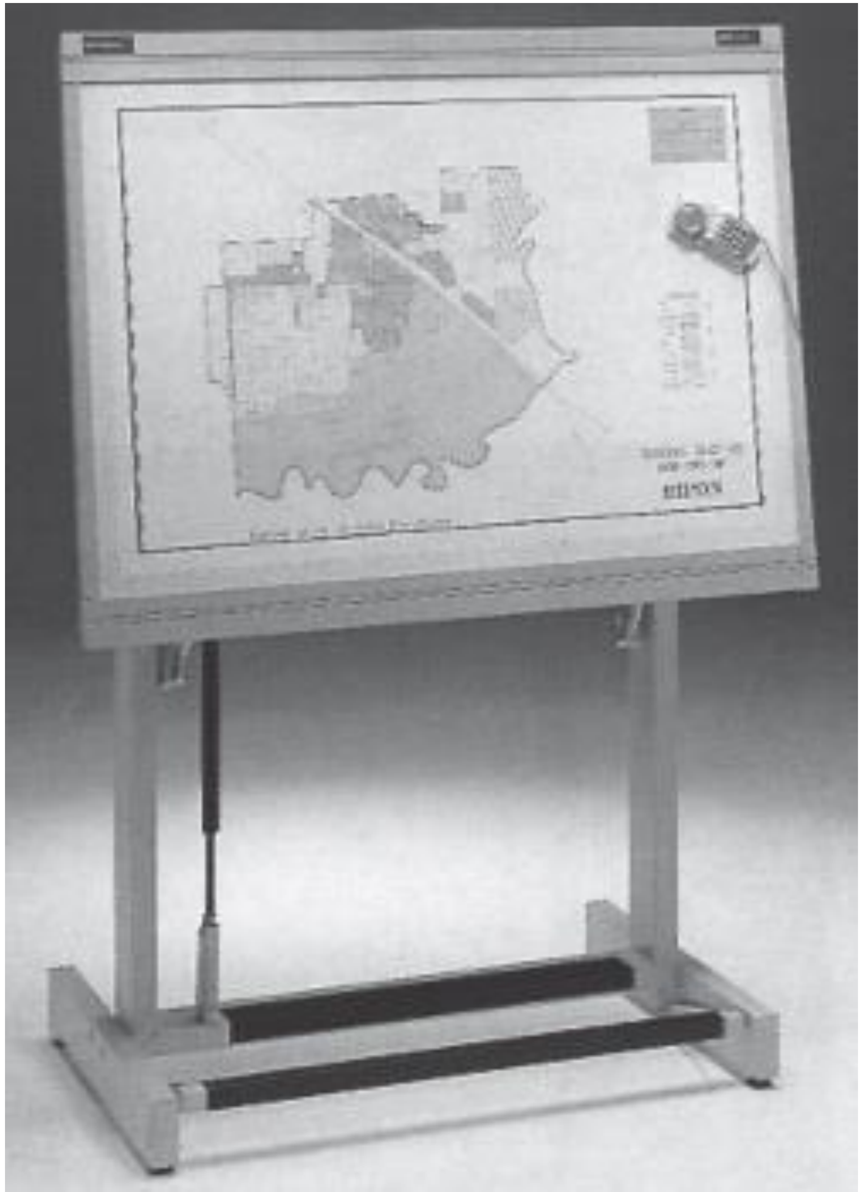
1. Calcul de la surface à l'aide des appareils et des programmes informatiques

1.1 Utilisation d'Autocad: En entrant les coordonnées des points d'angle du surface que nous voulons calculer



1.2 Surfaces digitalisées

La transformation d'une représentation graphique en données numériques est faite à l'aide d'un système informatique, appelé couramment digitaliseur, qui repère la position d'un point sur un plan et saisit ses coordonnées rectangulaires dans un repère d'axes orthonormé.



Digitaliseur

1.3 Le scanner

Avec le scanner, la carte papier peut être convertie en une image électronique Ensuite, il est traité par un programme qui calcule la surface

1.4 Utiliser les logiciels sur internet

Ces programmes fonctionnent sous le programme Google Earth. Par ce programme, nous pouvons marquer les limites de l'espace, qui le calcule directement.

* Sa précision est limitée, Par conséquent il n'est valable que pour les grandes surfaces.

* Un exemple de calcul de la superficie du centre Mila d'une université, avec le logciel https://www.google.com/maps

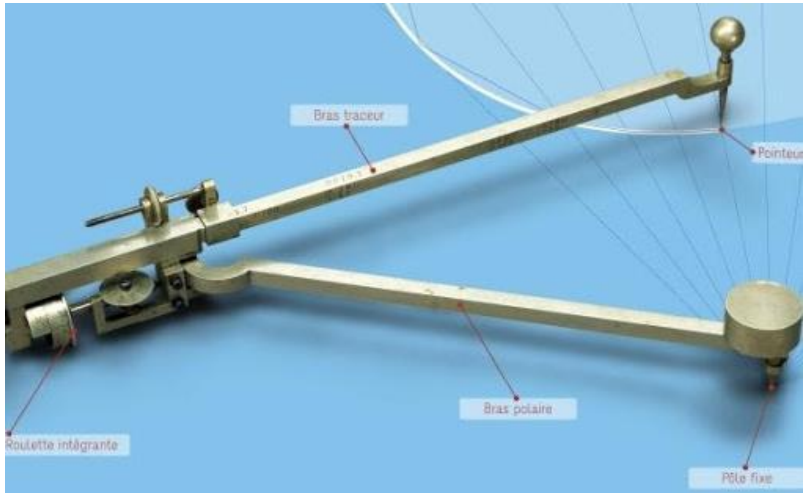
2. Calcul les surfaces par des méthodes mécaniques

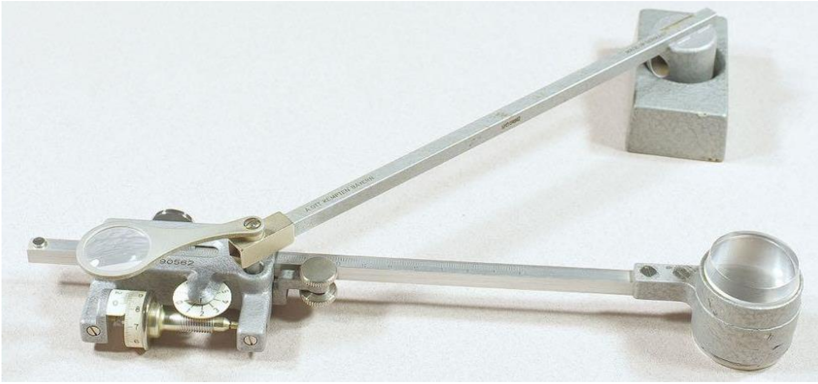
La surface peut être calculée mécaniquement par **Planimètres**

Le planimètre est un appareil mesureur intégrateur qui fournit mécaniquement la superficie d'un contour fermé dessiné à une échelle déterminée. Nous avons deux type :

- Planimètre polaire à pôle fixe
- Planimètre polaire à chariot

Planimètre polaire à chariot



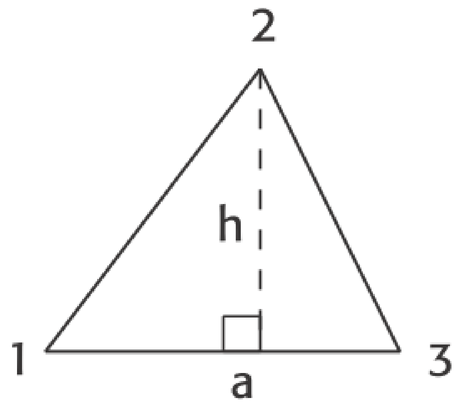


Planimètre polaire à pôle fixe

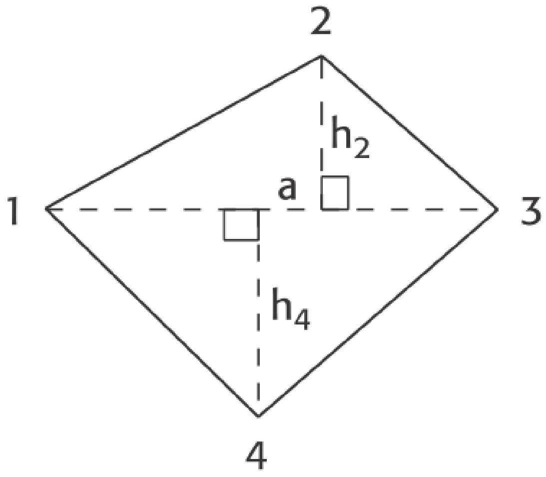
3. Superficies graphiques

3.1 Décomposition d'un polygone en **triangles** et en **trapèzes**

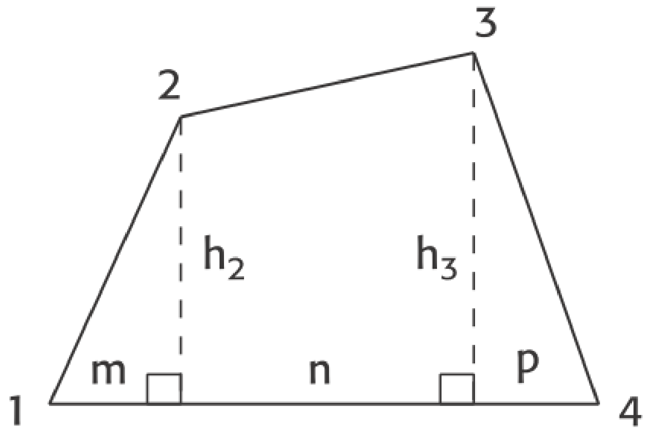
Le polygone reporté à l'échelle est décomposé graphiquement en triangles et trapèzes les plus proches possible du triangle équilatéral et du rectangle. À partir des mesures graphiques des bases et des hauteurs (figures suivantes), les superficies sont calculées par les formules élémentaires :



$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \, . \, h}$$



$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \, . \, (h_2 + h_4)}$$



$$\boxed{S = \frac{1}{2} \left(m \, . \, h_2 + n . (h_2 + h_3) + p . h_3 \right)}$$

Mesures des bases et des hauteurs

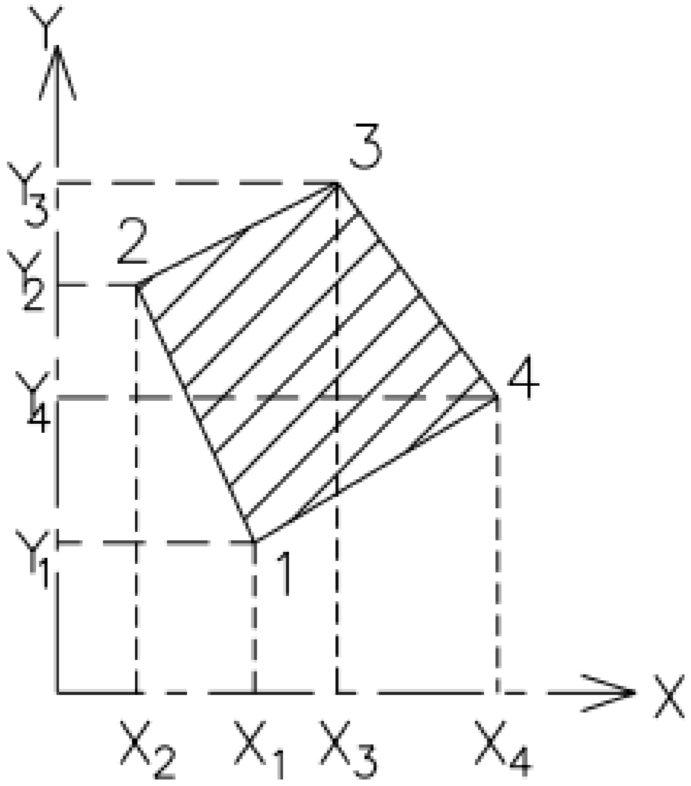
3.2 Surface d'un polygone quelconque

Les sommets sont connus en coordonnées **cartésiennes X,Y**

Soit un polygone de **n** sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires (Xi ; Yi). La figure suivante. présente un exemple avec n = 4. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{X}_i\,(Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{Y}_i\,(X_{i-1} - X_{i+1})$$



Surface en cartésien

Application

Le polygone suivant est défini par les coordonnées locales de ses sommets exprimées en mètre dans le tableau suivant.

Calculez sa superficie au centimètre carré près.

Point	A	B	C	D	E
Xi (m)	120,41	341,16	718,59	821,74	297,61
Yi (m)	667,46	819,74	665,49	401,60	384,13

Résultats

Point	$X_{i-1} - X_{i+1}$	$Y_{i-1} - Y_{i+1}$	$X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})$	$Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})$
A	–43,55	–435,61	–52451,8001	–29067,8830
B	–598,18	1,97	672,0852	–490352,0732
C	–480,58	418,14	300471,2226	–319821,1842
D	420,98	281,36	231204,7664	169065,5680
E	701,33	–265,86	–79122,5946	269401,8929
Totaux			400773,6795	–400773,6795

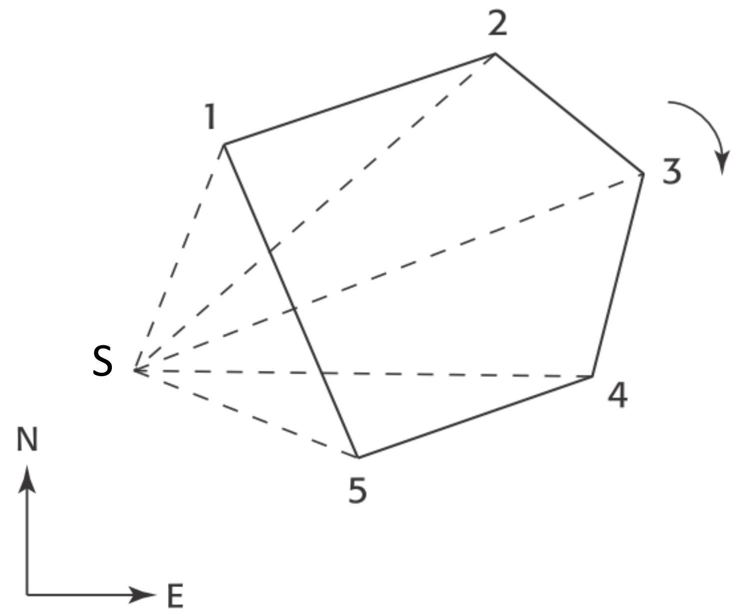
Surface totale : 200386,8398 m^2

Le double calcul de S par deux méthodes est une excellente vérification des calculs.

3.2 Surface d’un polygone quelconque

Les sommets sont connus en coordonnées **polaires**

Un appareil du type théodolite stationné au point S permet d'effectuer les lectures des angles αi sur les sommets du polygone. Si on mesure ensuite (par exemple au ruban) la distance horizontale du point S à chacun des sommets, on connaît ces sommets en coordonnées polaires topographiques (Dh , α) dans le repère (S, X, Y), l'axe des ordonnées Y étant la position du zéro du cercle horizontal du théodolite



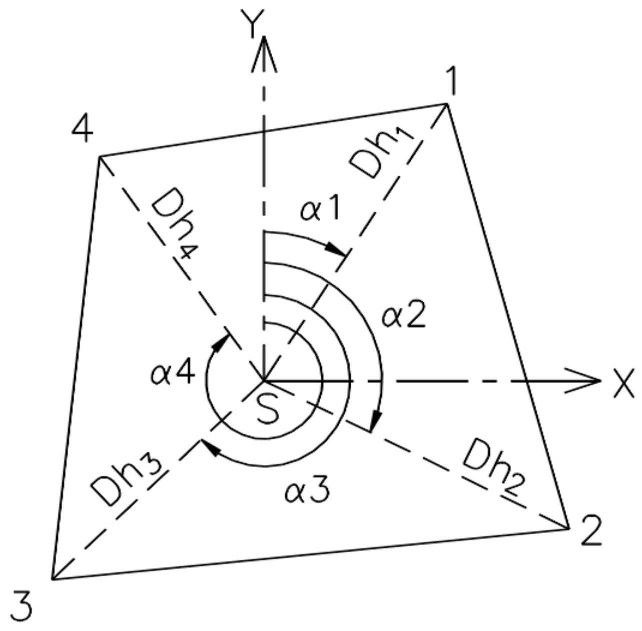
Soit un polygone levé par rayonnement depuis un point S (figure), dont les sommets sont numérotés à partir de l’unité en respectant la suite naturelle des nombres sans solution de continuité et parcouru dans le sens des aiguilles d’une montre.

Soit un polygone de **n** sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires (Xi ; Yi). La figure suivante. présente un exemple avec n = 4. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \,.\, Dh_{i+1} .\, \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

$$\alpha = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

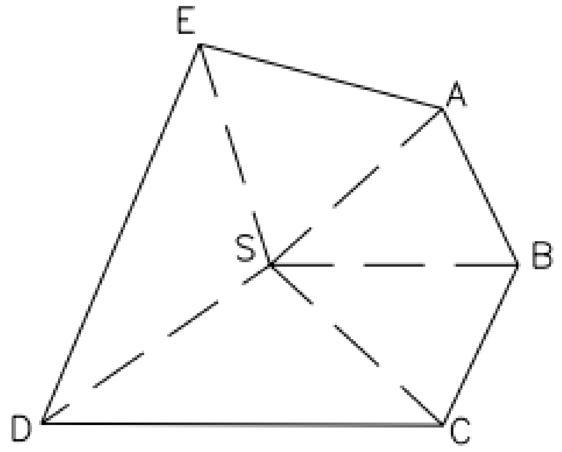
$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \,.\, Dh_{i+1} .\, \sin\alpha$$



Surface en polaire

Application

Calculez la surface du polygone (A-B-C-D-E) levé en coordonnées polaires topographiques à partir de la station S (figure suivante). Ces coordonnées sont données dans le tableau suivant :



Points	*Dh* (m)	Angles (gon)
A	48,12	53,12
B	51,33	100,03
C	48,71	147,41
D	57,48	261,53
E	47,93	380,37

gon= gr

Résultats

Le tableau suivant donne le détail des calculs.

La surface totale est $5409{,}1575\ m^2$

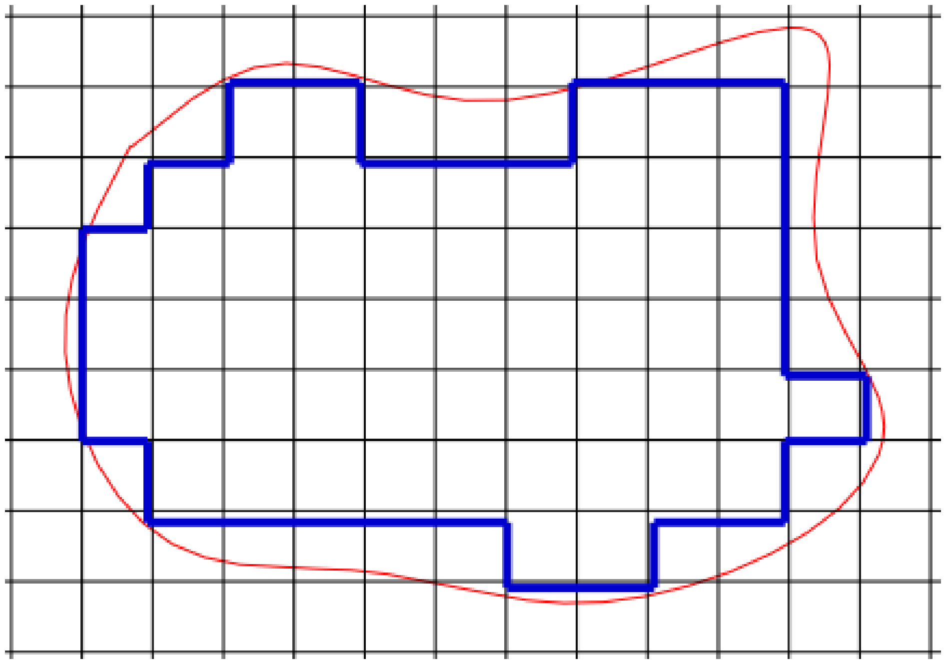
Triangles	Angle $(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$	Surface (m²)
ASB	46,91	829,8781
BSC	47,38	846,8655
CSD	114,12	1365,6326
DSE	118,84	1317,6265
ESA	72,75	1049,1548

4. Surface d'un forme quelconque

La méthode des **carrés nodulés**

La surface est donnée en carrés ayant 5 à 10 mm de côté (à une échelle donnée). Connaissant la surface d'un carré, on peut calculer la surface du polygone en utilisant la formule suivante :

$$\boxed{S = (a \, . \, N_1) + a_2}$$



Avec

a : surface d'un carré

N_1 : nombre des carrés complets

a_2 : la somme des carrés incomplets

Merci de votre attention