

Ensembles, relations et applications.

Par

Rabah Bououden

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila.

3 février 2021

Contents

1 Ensembles

2 Relations

- Représentation d'une relation binaire
- Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble
- Relation d'équivalence
- Relation d'ordre

3 Fonctions et applications.

- Fonctions
- Applications
- Injection, surjection, bijection

.....

1 Ensembles

2 Relations

- Représentation d'une relation binaire
- Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble
- Relation d'équivalence
- Relation d'ordre

3 Fonctions et applications.

- Fonctions
- Applications
- Injection, surjection, bijection

Definition

Si $E = \{a, b, \dots\}$ est l'ensemble dont les éléments sont a, b, \dots , on dit que E est défini en extension. Si $E = \{x, P(x)\}$ est l'ensemble des x qui satisfont la proposition P , on dit que E est défini en compréhension.

Definition

- 1 On note \emptyset l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- 2 Un ensemble à un élément est un singleton.
- 3 Un ensemble à deux éléments (distincts) est une paire.
- 4 Le cardinal d'un ensemble E noté $\text{card}(E)$ est le nombre (fini ou infini) d'éléments de E .

Definition

Si $E = \{a, b, \dots\}$ est l'ensemble dont les éléments sont a, b, \dots , on dit que E est défini en extension. Si $E = \{x, P(x)\}$ est l'ensemble des x qui satisfont la proposition P , on dit que E est défini en compréhension.

Definition

- 1 On note \emptyset l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
- 2 Un ensemble à un élément est un singleton.
- 3 Un ensemble à deux éléments (distincts) est une paire.
- 4 Le cardinal d'un ensemble E noté $\text{card}(E)$ est le nombre (fini ou infini) d'éléments de E .

Definition

(Inclusion)

On dit que F est contenu, est une partie, est un sous-ensemble ou est inclus dans E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E . Sinon, on écrit $F \not\subset E$. Enfin, l'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

On a toujours

- 1 $E \subset E$ (réflexivité).
- 2 Si $F \subset E$ et $G \subset F$ alors $G \subset E$ (transitivité).
- 3 $(E = F) \Leftrightarrow [(E \subset F) \text{ et } (F \subset E)]$ (antisymétrie)

Definition

(Inclusion)

On dit que F est contenu, est une partie, est un sous-ensemble ou est inclus dans E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E . Sinon, on écrit $F \not\subset E$. Enfin, l'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

On a toujours

- 1 $E \subset E$ (réflexivité).
- 2 Si $F \subset E$ et $G \subset F$ alors $G \subset E$ (transitivité).
- 3 $(E = F) \Leftrightarrow [(E \subset F) \text{ et } (F \subset E)]$ (antisymétrie)

Definition

(Complémentaire)

Si $F \subset E$, le complémentaire de F dans E est l'ensemble $C_E F$, aussi noté F^c (lorsque le rôle de E est clair), défini par

$$F^c = \{x \in E, x \notin F\}. \quad (1)$$

Proposition

On a toujours

- 1 $(F^c)^c = F$.
- 2 $F \subset G \Leftrightarrow G^c \subset F^c$

Definition

(Complémentaire)

Si $F \subset E$, le complémentaire de F dans E est l'ensemble $C_E F$, aussi noté F^c (lorsque le rôle de E est clair), défini par

$$F^c = \{x \in E, x \notin F\}. \quad (1)$$

Proposition

On a toujours

- 1 $(F^c)^c = F.$
- 2 $F \subset G \Leftrightarrow G^c \subset F^c$

Definition

(Intersection)

L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cap F$ des éléments x qui sont à la fois dans E et dans F . On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ et } x \in F\}. \quad (2)$$

Proposition

On a toujours

- 1 $E \cap F = F \cap E$ (commutativité).
- 2 $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ (associativité).
- 3 $(E \subset F \cap G) \Leftrightarrow [(E \subset F) \text{ et } (E \subset G)]$

Definition

(Intersection)

L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cap F$ des éléments x qui sont à la fois dans E et dans F . On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ et } x \in F\}. \quad (2)$$

Proposition

On a toujours

- 1 $E \cap F = F \cap E$ (commutativité).
- 2 $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ (associativité).
- 3 $(E \subset F \cap G) \Leftrightarrow [(E \subset F) \text{ et } (E \subset G)]$

Definition

(Union)

L'union de de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cup F$ des éléments x qui sont dans E , dans F ou dans les deux à la fois.

$$E \cup F = \{x, x \in E \text{ ou } x \in F\}. \quad (3)$$

Proposition

On a toujours

- 1 $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.
- 2 $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$.

Definition

(Union)

L'union de de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cup F$ des éléments x qui sont dans E , dans F ou dans les deux à la fois.

$$E \cup F = \{x, x \in E \text{ ou } x \in F\}. \quad (3)$$

Proposition

On a toujours

① $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c.$

② $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c.$

Definition

(Différence)

Si E et F sont deux ensembles, la différence $E \setminus F$ entre E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F . La différence symétrique $E \Delta F$ de E et F est

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E). \quad (4)$$

Definition

(Partition d'un ensemble)

Une partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties de E telles que

- 1 $\forall i, A_i \neq \emptyset,$
- 2 $\forall i, j$ tel que $i \neq j$ on a, $A_i \cap A_j = \emptyset.$

- 3 $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$

Definition

(Différence)

Si E et F sont deux ensembles, la différence $E \setminus F$ entre E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F . La différence symétrique $E \Delta F$ de E et F est

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E). \quad (4)$$

Definition

(Partition d'un ensemble)

Une partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties de E telles que

- 1 $\forall i, A_i \neq \emptyset$,
- 2 $\forall i, j$ tel que $i \neq j$ on a, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

- 3 $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$

Definition

(Produit cartésien)

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}, \quad (5)$$

La diagonale d'un ensemble E est

$$\Delta = \{(x, x), x \in E\} \subset E \times E. \quad (6)$$

1 Ensembles

2 Relations

- Représentation d'une relation binaire
- Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble
- Relation d'équivalence
- Relation d'ordre

3 Fonctions et applications.

- Fonctions
- Applications
- Injection, surjection, bijection

Definition

(Relation)

On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correspondance \mathcal{R} , qui lie d'une certaine façon des éléments de A à des éléments de B .

- 1 On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation \mathcal{R} .
- 2 Si x est lié à y par la relation \mathcal{R} , on dit que x est en relation \mathcal{R} avec y ; ou (x, y) vérifiée la relation \mathcal{R} et on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x; y)$, sinon on écrit : $x\not\mathcal{R}y$ ou $\not\mathcal{R}(x, y)$.
- 3 Une relation de A vers A est dite relation sur A .

Definition

(Relation)

On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correspondance \mathcal{R} , qui lie d'une certaine façon des éléments de A à des éléments de B .

- 1 On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation \mathcal{R} .
- 2 Si x est lié à y par la relation \mathcal{R} , on dit que x est en relation \mathcal{R} avec y ; ou (x, y) vérifiée la relation \mathcal{R} et on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x; y)$, sinon on écrit : $x\not\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$.
- 3 Une relation de A vers A est dite relation sur A .

Exemple

- ❶ Soit E , l'ensemble des enseignants de l'université de Mila, et F , l'ensemble des étudiants l'université de Mila. On détermine une relation \mathcal{R} allant de E vers F en posant que

$$\forall (x, y) \in E \times F, x\mathcal{R} y \Leftrightarrow x \text{ est l'enseignant de } y. \quad (7)$$

- ❷ Autres exemples de relations « humaines » : « être le frère de », « avoir le même âge que ».
- ❸ Soit $A = B = \mathbb{Z}$, On détermine une relation \mathcal{R} sur de \mathbb{Z} vers \mathbb{Z} en posant que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x\mathcal{R} y \Leftrightarrow 2|(a - b). \quad (8)$$

Ainsi, on a que $1\mathcal{R}7$, puisque 2 divise $-6 = (1 - 7)$. Notons que $18\not\mathcal{R}7$, puisque 2 ne divise pas $11 = (18 - 7)$.

Exemple

La correspondance \mathcal{R}' qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a, e, i, o, u, y\}$.
On a par exemple $0\mathcal{R}'e, 0\mathcal{R}'o, 0\mathcal{R}'a, 9\mathcal{R}'y, 6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

Definition

(Graphe d'une relation)

Soit \mathcal{R} une relation d'un ensemble A vers un ensemble B . Le graphe de \mathcal{R} (noté $G_{\mathcal{R}}$) est l'ensemble défini par :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B / x\mathcal{R}y\} \quad (9)$$

Example

La correspondance \mathcal{R}' qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a, e, i, o, u, y\}$.
On a par exemple $0\mathcal{R}'e, 0\mathcal{R}'o, 0\mathcal{R}'a, 9\mathcal{R}'y, 6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

Definition

(Graphe d'une relation)

Soit \mathcal{R} une relation d'un ensemble A vers un ensemble B . Le graphe de \mathcal{R} (noté $G_{\mathcal{R}}$) est l'ensemble défini par :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B / x\mathcal{R}y\} \quad (9)$$

Exemple

- 1 Reprenons la relation \mathcal{R} de l'exemple 3 précédent, alors :
 $(1, 7) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(18, 7) \notin G_{\mathcal{R}}$.
- 2 Si on reprend la relation \mathcal{R}' donnée par l'exemple 4 précédent, on aura :

$$G_{\mathcal{R}'} = \{(0, e), (0, o), (1, u), (2, e), (2, u), (3, 0), (3, i), (4, u), (4, a), (4, e), (5, i), (6, i), (7, e), (8, u), (8, i), (9, e), (9, u)\}$$

Remarque

Étant donné deux relations $\mathcal{R} = (A, B, R)$ et $\mathcal{R}' = (A', B', R')$, l'affirmation « les relations \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont égales » signifie que $A = A'$, $B = B'$ et $R = R'$: même source, même but et même graphe.

Exemple

- 1 Reprenons la relation \mathcal{R} de l'exemple 3 précédent, alors :
 $(1, 7) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(18, 7) \notin G_{\mathcal{R}}$.
- 2 Si on reprend la relation \mathcal{R}' donnée par l'exemple 4 précédent, on aura :

$$G_{\mathcal{R}'} = \{(0, e), (0, o), (1, u), (2, e), (2, u), (3, 0), (3, i), (4, u), (4, a), (4, e), (5, i), (6, i), (7, e), (8, u), (8, i), (9, e), (9, u)\}$$

Remarque

Étant donné deux relations $\mathcal{R} = (A, B, R)$ et $\mathcal{R}' = (A', B', R')$, l'affirmation « les relations \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont égales » signifie que $A = A'$, $B = B'$ et $R = R'$: même source, même but et même graphe.

On s'intéresse à nouveau à des relations binaires sur deux ensembles A et B donnés. Il s'agit donc de sous-ensembles R de produit cartésien $A \times B$.

- **Représentation ensembliste** : on liste tout simplement les couples satisfaisant à la relation.
- **Représentation à l'aide d'un diagramme sagittal** : schéma avec deux courbes pour des A et B quelconques (une première courbe pour la source A , et l'autre pour le but B) . Lorsque $A = B$, on peut soit conserver le schéma à deux courbes, soit tout ramener dans une seule courbe représentant A . Cette dernière vision est souvent fort instructive.

On s'intéresse à nouveau à des relations binaires sur deux ensembles A et B donnés. Il s'agit donc de sous-ensembles R de produit cartésien $A \times B$.

- **Représentation ensembliste** : on liste tout simplement les couples satisfaisant à la relation.
- **Représentation à l'aide d'un diagramme sagittal** : schéma avec deux courbes pour des A et B quelconques (une première courbe pour la source A , et l'autre pour le but B) . Lorsque $A = B$, on peut soit conserver le schéma à deux courbes, soit tout ramener dans une seule courbe représentant A . Cette dernière vision est souvent fort instructive.

On s'intéresse à nouveau à des relations binaires sur deux ensembles A et B donnés. Il s'agit donc de sous-ensembles R de produit cartésien $A \times B$.

- **Représentation ensembliste** : on liste tout simplement les couples satisfaisant à la relation.
- **Représentation à l'aide d'un diagramme sagittal** : schéma avec deux courbes pour des A et B quelconques (une première courbe pour la source A , et l'autre pour le but B) . Lorsque $A = B$, on peut soit conserver le schéma à deux courbes, soit tout ramener dans une seule courbe représentant A . Cette dernière vision est souvent fort instructive.

Représentation d'une relation binaire

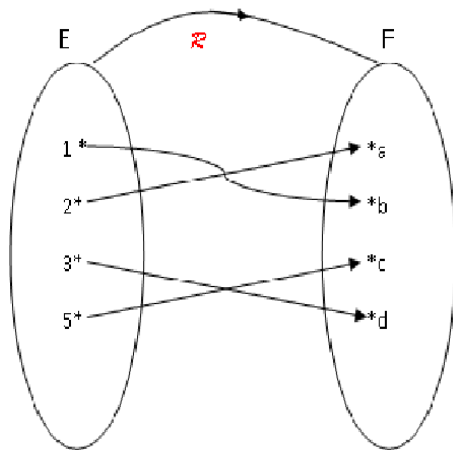


Figure: Diagramme sagittal d'une relation \mathcal{R} de graphe
 $G_{\mathcal{R}} = \{(1, b), (2, a), (3, d), (5, c)\}$

- **Représentation à l'aide d'une formule** Par exemple la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} telle que : $x \mathcal{R} y$ ssi $x^2 = y^2$.
- **Représentation à l'aide d'un graphique cartésien** particulièrement commode pour des relations binaires sur \mathbb{R} (ou encore sur \mathbb{N} ou \mathbb{Z}).

- **Représentation à l'aide d'une formule** Par exemple la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} telle que : $x \mathcal{R} y$ ssi $x^2 = y^2$.
- **Représentation à l'aide d'un graphique cartésien** particulièrement commode pour des relations binaires sur \mathbb{R} (ou encore sur \mathbb{N} ou \mathbb{Z}).

On s'intéresse maintenant à une relation binaire dont la source coïncide avec le but. On se retrouve donc avec une relation sur un ensemble A donné.

Nous nous intéressons ici aux principales propriétés que peut posséder ou non une telle relation binaire.

On s'intéresse maintenant à une relation binaire dont la source coïncide avec le but. On se retrouve donc avec une relation sur un ensemble A donné.

Nous nous intéressons ici aux principales propriétés que peut posséder ou non une telle relation binaire.

Definition

Soit \mathcal{R} , une relation (binaire) sur un ensemble A . On dit que \mathcal{R} est

- 1 **réflexive** lorsque pour tout $a \in A$, on a $a \mathcal{R} a$;
- 2 **symétrique** lorsque pour tout couple $(a, b) \in A^2$, $a \mathcal{R} b$ impliquent $b \mathcal{R} a$;
- 3 **transitive** lorsque pour tout trio d'éléments $a, b, c \in A$, $(a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c)$ impliquent $(a \mathcal{R} c)$;
- 4 **antisymétrique** lorsque pour tout $(a, b) \in A^2$ si $(a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a)$, alors $(a = b)$.

Exemple

- 1 Soit $A = B = \mathbb{Z}$ et $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 2|(a - b)\}$. On a alors que \mathcal{R} est réflexive, symétrique, transitive, mais pas antisymétrique.
- 2 Etant donnée l'univers \mathcal{U} , la relation d'inclusion, qui relie deux parties de \mathcal{U} ($X \subseteq Y$), est elle aussi réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique.

Exemple

Soit la relation \mathcal{R} définie sur \mathbb{Z} par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y

- 1 Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a x divise x (même 0 divise 0). donc $\forall x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$, alors \mathcal{R} est réflexive.
- 2 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow (x \text{ divise } y) \not\Rightarrow (y \text{ divise } x)$ par exemple 1 divise 4 et 4 ne divise pas 1 alors \mathcal{R} n'est pas symétrique.
- 3 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow ((x \text{ divise } y) \wedge (y \text{ divise } x)) \not\Rightarrow (x = y)$.
Par exemple (1 divise -1) et (-1 divise 1) et $1 \neq -1$; alors \mathcal{R} n'est pas antisymétrique.
- 4 Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow ((x \text{ divise } y) \wedge (y \text{ divise } z)) \Rightarrow (x \text{ divise } z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$. Alors \mathcal{R} est transitive.

Definition

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble A .

- 1 \mathcal{R} est dite relation **d'équivalence** si \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.
- 2 Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence, alors
 - 1 Pour chaque $a \in A$ l'ensemble $\dot{a} = \{x \in A / x\mathcal{R}a\}$ est appelé **classe d'équivalence** de a modulo \mathcal{R} .
 - 2 L'ensemble $A/\mathcal{R} = \{\dot{a} / a \in A\}$ est appelé **l'ensemble quotient** de A par \mathcal{R} .

Definition

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble A .

- ❶ \mathcal{R} est dite relation **d'ordre** si \mathcal{R} est réflexive, antisymétrique et transitive.
- ❷ Si \mathcal{R} est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de \mathcal{R} .
 - ❶ $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation **d'ordre total**, si

$$\forall x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x).$$
 - ❷ $\leq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre partiel, si

$$\exists x, y \in A : ((x \not\leq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \not\leq_{\mathcal{R}} x)).$$

Remarque

Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$.

Definition

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble A .

- ① \mathcal{R} est dite relation **d'ordre** si \mathcal{R} est réflexive, antisymétrique et transitive.
- ② Si \mathcal{R} est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de \mathcal{R} .
 - ① $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation **d'ordre total**, si

$$\forall x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x).$$
 - ② $\leq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre partiel, si

$$\exists x, y \in A : ((x \not\leq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \not\leq_{\mathcal{R}} x)).$$

Remarque

Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$.

Definition

(Eléments particuliers)

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble E , et soit A une partie de E .

- 1 Un élément $m \in E$ est appelé un minimum de A ssi
 - 1 $m \in A$,
 - 2 pour tout $x \in A$, on a $m \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi de m qu'il est un plus petit élément de A .)
- 2 Un élément $M \in E$ est appelé un maximum de A ssi
 - 1 $M \in A$,
 - 2 pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} M$. (On dit aussi de M qu'il est un plus grand élément de A .)
- 3 Un extremum est un élément qui est un minimum ou un maximum.

Definition

(Éléments particuliers)

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble E , et soit A une partie de E .

- 1 Un élément $u \in E$ est appelé un minorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $u \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi que A est minoré par u).
- 2 Un élément $U \in E$ est appelé un majorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} U$. (On dit aussi que A est majoré par U).
- 3 L'ensemble A est dit minoré dans E si A admet un minorant dans E ; A est dit majoré dans E si A admet un majorant dans E ; et A est dit borné dans E si A est à la fois minoré et majoré.

Definition

(Eléments particuliers)

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble E , et soit A une partie de E .

- ① Un élément $v \in E$ est appelé une borne inférieure de A ssi
 - ① v est un minorant de A ,
 - ② pour tout minorant v' de A , on a $v' \leq_{\mathcal{R}} v$. (On dit aussi que v est un infimum de A .) Notation : $v = \inf(A)$.
- ② Un élément $V \in E$ est appelé une borne supérieure de A ssi
 - ① V est un majorant de A ,
 - ② pour tout majorant V' de A , on a $V \leq_{\mathcal{R}} V'$. (On dit aussi que V est un supremum de A .) Notation : $V = \sup(A)$.

1 Ensembles

2 Relations

- Représentation d'une relation binaire
- Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble
- Relation d'équivalence
- Relation d'ordre

3 Fonctions et applications.

- Fonctions
- Applications
- Injection, surjection, bijection

Definition

Une relation f de E vers F est dite fonction si tout $x \in E$ a au plus une image y dans F . On dit aussi que f est une fonction et on écrit alors $y = f(x)$ au lieu de xyf . On écrit aussi

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) .$$

Definition

Soit la fonction $f : E \rightarrow F$, A est une partie de E et B est une partie de F .

- ① L'image de A par f est

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

- ② L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Definition

- ① *La composée de la fonction $f : E \rightarrow F$ et de la fonction $g : F \rightarrow G$ est la fonction*

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

$$x \mapsto g(f(x)) .$$

- ② *Toute restriction d'une fonction reste une fonction.*

Definition

Une fonction f est une application si tout élément de E à (exactement) une image dans F . On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F .

Une fonction f est une application si et seulement si son domaine de définition est E tout entier.

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E .
Alors,

① Si $A \subset B$, on a $f(A) \subset f(B)$.

② On a toujours

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

③ On a toujours

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soient C et D deux parties de F .
Alors,

❶ Si $C \subset D$, alors $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

❷ On a toujours

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

❸ On a toujours

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1 Si A est une partie de E , on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- 2 Si C est une partie de F , on a $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

Soit E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

Definition

- 1 Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent dans E :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

- 2 Elle est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

- 3 Elle est bijective si elle est à la fois injective et surjective (tout élément de F a exactement un antécédent dans E).

On peut faire les remarques suivantes :

Remarque

- 1 *Une application est injective si et seulement si la relation réciproque est une fonction.*
- 2 *Une application est surjective si et seulement si son image est son ensemble d'arrivée.*
- 3 *Une application est bijective si et seulement si la relation réciproque est une application.*

On peut faire les remarques suivantes :

Remarque

- 1 *Une application est injective si et seulement si la relation réciproque est une fonction.*
- 2 *Une application est surjective si et seulement si son image est son ensemble d'arrivée.*
- 3 *Une application est bijective si et seulement si la relation réciproque est une application.*

Proposition

- 1 Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications injectives, surjectives ou bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ l'est aussi.
- 2 Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$. On a alors $g = f^{-1}$.
- 3 Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications avec $g \circ f : E \rightarrow G$ injective, alors f est aussi injective.
- 4 Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications avec $g \circ f : E \rightarrow G$ surjective, alors f est aussi surjective.

