Matière : Systèmes asservis

Chapitre I : Transformée de Laplace et modélisation des systèmes

1 – DEFINITIONS : On appelle système linéaire, un système tel que si le signal d'entrée $x_1(t)$ donne $y_1(t)$ en sortie, et $x_2(t)$ donne $y_2(t)$, alors, le signal d'entrée est : $c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$ donne $c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t)$ en sortie. Pour tout couple de constantes c_1 et c_2.

$$Entrée \sum_i x_i(t) \rightarrow \sum_i y_i(t) Sortie$$

On dit qu'un terme est linéaire s'il est du premier degré dans les variables dépendantes et leurs dérivées. Aussi, on dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle consiste en une somme de termes linéaires. Toutes les autres équations différentielles sont dites non linéaires.

Exemple d'un système du premier ordre : $\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$ Equation différentielle du 1^er^ ordre.

2 –Représentation d'un système par une équation différentielle

La plupart du temps, on représente un système dynamique linéaire continu monovariable d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ par une équation différentielle à coefficients constants de la manière suivante:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_c \frac{d^c y(t)}{dt^c} = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)$$

où :* les coefficients *ai* et *bi* sont des constantes réelles, telles que *ac*, *an*, *b0* et *bm* soient non nuls,
* n et m sont des entiers positifs tels que $m \leq n$ pour que le système soit causal; n est l'ordre du système,
* c est un entier positif ou nul appelé classe du système. Cette équation différentielle est une représentation entrée/sortie du système. La solution de cette équation représente l'évolution de la sortie du système $y(t)$ au cours du temps en fonction de l'entrée $u(t)$ et de conditions initiales.

Exemple 1 : Considérons le circuit RLC ci-dessous :

On veut déterminer la relation liant $u(t)$ (tension d'alimentation)

et $y(t)$ (le courant $i(t)$). L'équation de maille donne :

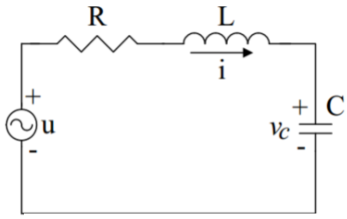


Figure 1 : Circuit RLC

$$\mathrm{R}i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$$\mathrm{L}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}} y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Exemple 2 : La Figure 2 montre une suspension de masse M dont on veut définir la relation liant le déplacement linéaire $y(t)$ (sortie) et la force $f(t)$ (entrée).

L'équation de Newton donne :

$$\mathrm{M}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) - \mathrm{B}\frac{dy(t)}{dt} - \mathrm{K}y(t)$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \mathrm{B}\frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{K}y(t) = f(t)$$

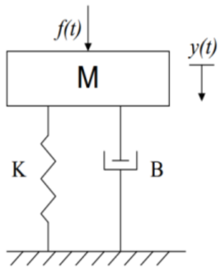


Figure 2 : Schéma d'une suspension

3- Transformée de Laplace : Un autre outil où manière plus aisé pour résoudre une équation différentielle et la remplacer par une expression algébrique est bien la Transformée de Laplace.

Définition : A toute fonction f(t) tel que f(t)=0 lorsque t<0, on fait correspondre une fonction F(p) de variable complexe p = jω appelée transformée de Laplace de f(t).

$$F(p) = L\,[f(t)], \qquad f(t) = L^{-1}\,[F(p)]$$

F(p) : Transformée de Laplace.   f(t) : Image de F(p)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

<u>Exemple 1</u> : Calculer la transformée de Laplace de f(t) :
f (t) = 1 pour t>0 et f (t) = 0 pour t<0

Considérons la fonction constante $f(t) = 1$ si $t \geq 0$

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt}\,dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} 1 \cdot e^{-pt}\,dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left.\frac{-e^{-pt}}{p}\right|_0^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-e^{-pN}}{p} - \frac{-1}{p}\right)$$

Cette limite n'existe que pour certaines valeurs de p. En effet, si $p > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{-e^{-pN}}{p} = 0 \qquad (\text{la limite n'existe pas si } p \leq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{1\} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} = F(p)$$

Remarque : d'autre écriture où notation de la TL est de remplacer p par s et la définition de la TL devient

La **transformée de Laplace** d'une fonction $f(t)$, notée $\mathscr{L}\{f(t)\}$, est la fonction $F(s)$ définie par

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\,dt = F(s)$$

si l'intégrale impropre converge. Celle-ci converge si la limite suivante existe

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{N} f(t) e^{-st}\,dt$$

<u>Exemple 2</u> : Considérons la fonction $f(t) = \cos(t)$ si $t \geq 0$

$$\mathscr{L}\{\cos(t)\} = \int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{-st}\,dt = \left.\left(\frac{\sin(t)}{s^2+1} - \frac{s\cdot\cos(t)}{s^2+1}\right) e^{-st}\right|_0^{\infty} = ???$$

L'intégrale converge seulement si $s > 0$. En effet, pour une valeur donnée et positive de s

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\sin(t)}{s^2+1} - \frac{s\cdot\cos(t)}{s^2+1}\right) e^{-st} = 0 \quad \text{si } s > 0 \qquad (\text{et la limite n'existe pas si } s \leq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\cos(t)\} = \left.\left(\frac{\sin(t)}{s^2+1} - \frac{s\cdot\cos(t)}{s^2+1}\right) e^{-st}\right|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1} = F(s)$$

Donc si $f(t) = \cos(t)$ alors $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ avec $s > 0$

3- QUELQUES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

a- Somme de deux fonctions f1(t) et f2(t) transformables [3] :

L [f1(t)] = F1(p) et L [f2(t)] = F2(p) alors L [f1(t) + f2(t)] =F(p) = F1(p) + F2(p)

b- Linéarité :

Si f(t) = a f1(t) + b f2(t) alors F(p) = aF1(p) + bF2(p)

c- Dérivée :

Si L [f(t)] = F(p) et L [df(t)/dt] = F'(p) alors F'(p) = pF(p)-f(0)

d- Dérivée multiple :

$F^n(p)$= L [$d^n f(t)$ / dtn] alors $F^n(p) = p^n F(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f'(0)$-…………….-$f^{n-1}(0)$

Par exemple : $\frac{d^2 f}{dt^2} \quad \rightarrow \quad p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \frac{F(p)}{p}$$

Théorème du retard : Considérons la fonction $f(t - \mathbf{t})$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 3), autrement dit un retard d'un temps **t**.

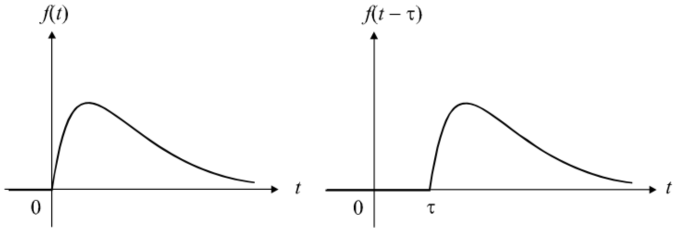
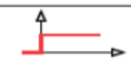
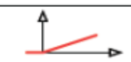
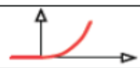
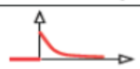
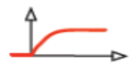
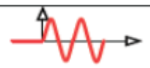
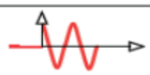
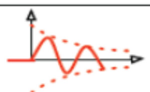
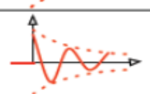


Figure 3 Représentation temporelle d'un signal retardé.

$f(t - \mathbf{t}) \rightarrow F(p)\, e^{-pt}$

Table des transformées :

Fonction	Allure	$f(t),\ (a,b) \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$	$\mathscr{L}[f(t)]$
Dirac		$b \times \delta(t)$	b
Échelon		$b \times u(t)$	$\frac{b}{p}$
Rampe		$b \times t \times u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
Puissance		$b \times t^n \times u(t)$	$b \times \frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle		$b \times e^{-at} \times u(t)$	$\frac{b}{p+a}$
Premier ordre		$b \times (1 - e^{-at}) \times u(t)$	$\frac{b}{p} \times \frac{a}{p+a}$
Sinus		$b \times sin(\omega t).u(t)$	$b \times \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus		$b \times cos(\omega t).u(t)$	$b \times \frac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus amortie		$e^{-at} sin(\omega t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
Cosinus amortie		$e^{-at} cos(\omega t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, a l'aide de la transformée inverse de Laplace. Le diagramme de la figure 4 illustre ce concept.

L'avantage principal d'analyser des circuits de cette façon est que les calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent`a l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

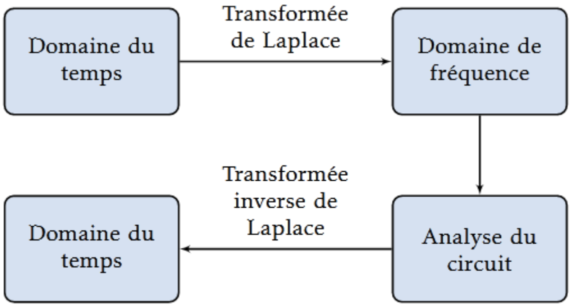


FIGURE 4 – Étapes d'analyse d'un circuit avec la transformée de Laplace

4-Signaux usuels et leurs transformées de Laplace

<u>1/ La fonction échelon</u> : La fonction échelon est une fonction très utilisée. C'est la fonction o`u il y a une dis-continuité e à l'origine. Par exemple, lorsqu'on allume une source de tension DC, il y a un changement abrupte de la tension ; c'est une fonction échelon. La figure 5 illustre la fonction échelon. Elle est 0 pour t <0. On représente la fonction échelon par le symbole u(t).

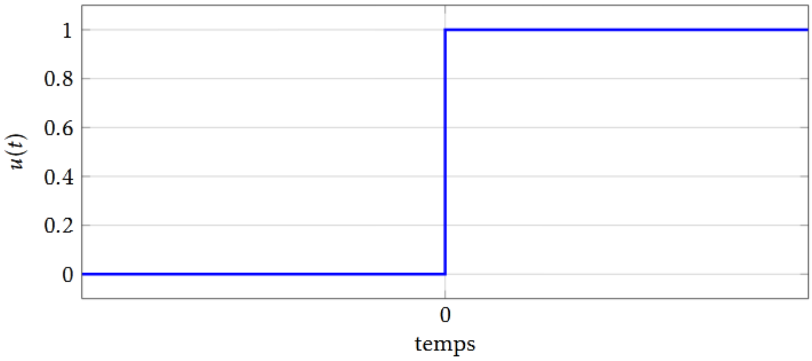


FIGURE 5 – Fonction échelon

On peut multiplier la fonction échelon par une constante K quelconque pour obtenir un échelon d'amplitude voulue. La définition mathématique de la fonction échelon est : On peut multiplier la fonction échelon par une constante K quelconque pour obtenir un échelon d'amplitude voulue. La définition mathématique de la fonction échelon est : $Ku(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ K & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Si K= 1, on appelle ceci la fonction échelon unitaire.Une application de la fonction échelon est qu'elle permet d'écrire mathématiquement l'expression d'une fonction qui est différente de 0 pour une période fixe. Une application très commune en génie électrique est un pulse de durée fixe, comme à la figure 6.

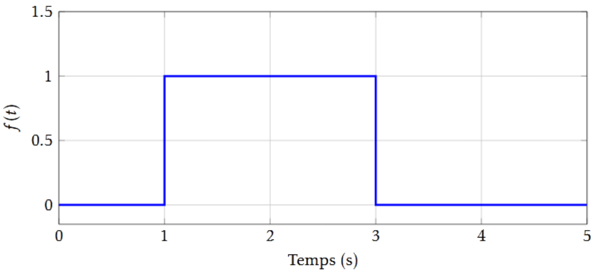
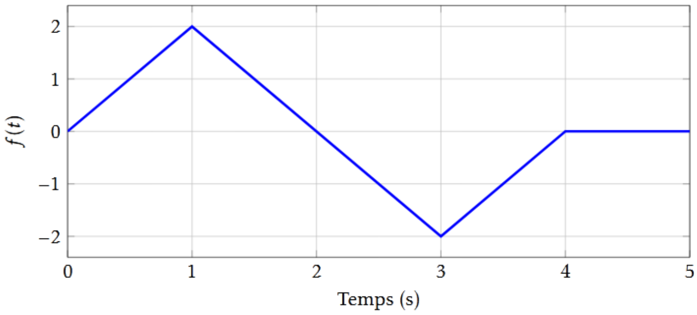


FIGURE 6 – Pulse de durée fixe

Dans ce cas, on peut écrire la fonction comme f(t) =u(t−1)−u(t−3). On peut considérer ceci comme un échelon qu'on “active” à t= 1 puis un deuxième échelon négatif à t= 3 qui permet de “désactiver” le premier échelon.

Exemple : Utiliser des fonctions échelon pour écrire une expression pour la fonction de la figure suivante.



ayant des points d'intersections à 0, 1, 3 et 4s. Pour construire l'expression voulue, il faut ajouter et soustraire des échelons aux endroits appropries.

1. Pour 0< t <1, on a la fonction 2t.

2.A t= 1, on doit allumer la fonction−2t+ 4 et l'eteindre`at= 3

3. A t= 3, on doit allumer la fonction 2t−8 et l'eteindre à t= 4.On obtient alors comme fonction : f(t) = 2t[u(t)−u(t−1)]+ (−2t+ 4)[u(t−1)−u(t−3)]+ (2t−8)[u(t−3)−u(t−4)] Ou, en groupant les termes u(t−a) : f(t) = 2tu(t) + (−4t+ 4)u(t−1) + (4t−12)u(t−3)−(2t−8)u(t−4).

<u>2/ La fonction impulsion</u> : On rencontre assez souvent, lors de l'étude de circuits, des pulses qui ont des durées très courtes. Ces pulses peuvent se produire lors d'une opération de commutation, ou lorsque des circuits sont excites par des sources impulsionnelles. De plus, l'impulsion est un outil mathématique très utile, comme on verra plus tard. Il nous faut donc une façon pour représenter ce genre de signal. Il existe plusieurs façons pour représenter une impulsion ; on utilisera ici l'approche d'un signal triangulaire, comme`a la figure 7. Remarquer que le triangle est symétrique. Par rapport à l'origine, et que la valeur maximale est $1/\epsilon$. obtenir une vraie impulsion, il faudra que $\epsilon \to 0.$

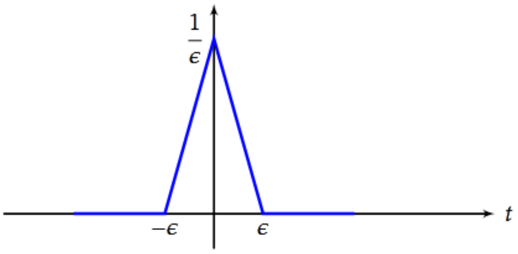


FIGURE 7 – Impulsion représentée par un triangle

Qu'arrive-t il alors`a cette fonction triangulaire lorsque $\epsilon \to 0.$? On retrouve trois caractéristiques importantes :

1. L'amplitude approche l'infini.

2. La durée du pulse se rapproche de 0.

3. La surface du triangle est constante et égale`a 1.On utilise la notation δ(t) pour démontrer une impulsion. Mathématiquement, la fonction impulsion (qu'on appelle aussi fonction de Dirac) est défini par :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt & = 1 \\ \delta(t) & = 0 \qquad \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Si l'impulsion se produit à un temps t=a, on écrit δ(t−a).

La transformée de Laplace de la fonction impulsion : $\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1$

Fonction	$f(t)$	$F(s)$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
polynôme (général)	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
sinus	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

TABLEAU 2 – Transformées de Laplace communes.

5-Application de la transformée de Laplace : On va maintenant utiliser la transformée de Laplace pour analyser des circuits électriques. Soit le circuit RLC de la figure 8. On suppose que l'énergie initiale du système est nulle. On veut trouver v(t) pout t≥0.

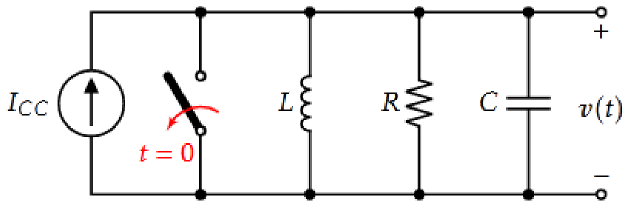


FIGURE 8 – Circuit RLC

On peut écrire directement l'équation que la tension v(t) doit satisfaire pour decrire le comportement du circuit si on fait la somme des courants au nœud supérieur :

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{CC}u(t)$$

Noter qu'on ajoute le terme u(t) pour l'équation de ICC pour indiquer l'effet de la commutation. Maintenant il suffit d'appliquer les transformées opérationnelles à l'équation précédente pour les transformer dans le domaine de Laplace :

$$\frac{V(s)}{R}+\frac{1}{L}\frac{V(s)}{s}+C(sV(s)-v(0^-))=I_{CC}\frac{1}{s}$$

ce qui est une équation algébrique en fonction de s. On peut enlever le terme v(0−) puisqu'on a dit que l'énergie initiale du système est 0. Si on isole V(s) dans l'équation précédente, on obtient

$$V(s)=\frac{I_{CC}/C}{s^2+(1/RC)s+(1/LC)}$$

Pour déterminer v(t), il faut faire la transformée inverse de l'expression de V(s). On note cette opération de la façon suivante : $v(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{V(s)\}$

6-Transformée inverse par décomposition en éléments simples

L'expression de *V* (*s*) obtenue dans la section précédente est une fonction **rationnelle** de *s* : c'est le rapport de deux polynômes de *s*. Pour des circuits linéaires comprenant des Composantes discrètes R, L ou C constantes, l'expression de la tension ou du courant dans ces circuits sera toujours une fonction rationnelle de *s*. Si on peut inverser n'importe quelle fonction rationnelle de *s*, on peut résoudre les problèmes d'analyse de circuits.

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme
Les coefficients *a* et *b* sont des constantes réelles, et les exposants *m* et *n* sont des entiers positifs. De façon générale, lorsqu'on analyse un circuit électrique, *m* > *n*. La technique utilisee pour résoudre ce genre d'équation est **l'expansion en fractions partielles**.
Il faut factoriser le dénominateur en une somme de termes et ensuite trouver la transforme inverse de chaque terme. Il y a trois différentes façons de faire, selon la valeur des racines : réelles et distinctes, réelles et répétées, ou complexes.

6.1 Racines réelles et distinctes.

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Exemple :

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{K_1}{(s+1)}+\frac{K_2}{(s+2)}$$

On peut écrire :

Pour isoler *K*1, on multiplie chaque coté par (*s* + 1). On obtient :

$$\frac{2}{(s+2)}=K_1+\frac{(s+1)K_2}{(s+2)}$$

Si on prend *s* = -1,

$$K_1=\left.\frac{2}{(s+2)}\right|_{s=-1}=2$$

$$K_2 = \frac{2}{(s+1)}\bigg|_{s=-2} = -2$$

Donc,

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

qui donne la transformée inverse suivante : $f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$

6.2 Racines au dénominateur réelles et répétées.

Soit

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} \qquad F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2} \quad (*)$$

On peut trouver les termes selon

La constante K_1 peut être trouvée en utilisant la première méthode montrée plus haut (ce qui donne $K_1 = 2$). Pour trouver K_2, on multiplie par $(s + 2)^2$:

$$\frac{2}{s+1} = \frac{K_1}{s+1}(s+2)^2 + K_2 + K_3(s+2)$$

On évalue à $s = -2$,

$$K_2 = \frac{2}{s+1}\bigg|_{s=-2} = -2$$

Pour K_3, on dérive l'équation * par rapport à s,

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1 + K_3$$

De même, si $s = -2$,

$$K_3 = \frac{-2}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-2} = -2$$

6.3 Racines complexes au dénominateur.

Ici encore, on démontre `à l'aide d'un exemple. Soit $F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$

On peut écrire

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Le coefficient K_1 est obtenu de la façon habituelle ; $K_1 = 0.6$. Pour K_2 et K_3, on multiplie les deux côtes par le dénominateur, $s(s^2 + 2s + 5)$. On obtient:

$3 = K_1(s^2 + 2s + 5) + (K_2s + K_3)s = (K_1 + K_2)s^2 + (2K_1 + K_3)s + 5K_1$

On a donc trois équations,

$K_1 + K_2 = 0$

$2K_1 + K_3 = 0$

$5K_1 = 3$

d'où on trouve que $K_2 = -0.6$ et $K_3 = -1.2$.

La fonction de transfert devient $F(s) = 0.6\frac{1}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2+2s+5}$

La transformee inverse est $f(t) = 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5 \sin 2t)$
$= 0.6 - 0.671e^{-t} \cos(2t - 26.57^o)$

Pour transformer la solution précédente avec un sinus et cosinus à une solution où il n'y a qu'un cosinus, on se sert de relations trigonométriques. Soit :$g(x) = a \cos x + b \sin x$
On peut factoriser l'équation précédente de la façon suivante :

$$\sqrt{(a^2+b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sin x\right)$$

Les termes devant les cosinus et sinus forment les équations d'un triangle de cote a et b et d'hypoténuse .$\sqrt{(a^2+b^2)}$.

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad \text{et} \qquad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

On peut donc réduire l'équation

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x)$$

et `a l'aide d'identités trigonométriques,

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos(x-\phi))$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

On peut aussi faire ce type de problème avec des nombres complexes :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2} \end{aligned}$$

On utilise la première technique pour résoudre, $K_1 = 0.6$. Les autres coefficients sont

$$K_2 = \left.\frac{3}{s(s+1-j2)}\right|_{s=-1-j2} = -0.15(2+j)$$

et K_3 est le conjugue de K_2, $K_3 = 0.15(2 + j)$. La fonction devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} + \frac{-0.15(2+j)}{s+1+j2} + \frac{-0.15(2-j)}{s+1-j2}$$

Dans le domaine du temps, la fonction est

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15\left[(2+j)e^{-(1+j2)t} + (2-j)e^{-(1-j2)t}\right] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}\left[(2+j)e^{-j2t} + (2-j)e^{j2t}\right] \end{aligned}$$

Avec la relation d'Euler,

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(-2t) + j\sin(-2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(2t) - j\sin(2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}(4\cos 2t + 2\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57°) \end{aligned}$$

et c’est la solution obtenue précédemment

7- Pôles, zéros et réponse

Soit la fonction de transfert suivante : $F(s) = \dfrac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m s^n + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}$

où $= \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}$ ı`où $m \geq n$.

Les racines du polynôme au dénominateur sont appelés les *pôles* : ce sont les valeurs de *s* o`u la fonction devient infinie. Dans ce cas-ci, ce sont $p_1; p_2; \ldots\ldots ; p_m$.

Les racines du polynôme au numérateur sont appelés les *zéros* : ce sont les valeurs de *s* où la fonction devient nulle. Dans ce cas-ci, ce sont $z_1; z_2 \ldots\ldots ; z_n$.

On peut représenter les pôles et zéros par un diagramme. Ce diagramme donne de l’information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d’analyser un système. L’axe des *x* représente la partie réelle du pôle ou du zéro, et l’axe *y* représente la partie imaginaire du pôle ou du zéro.

On démontre par un exemple. Soit la fonction suivante : $G(s) = \dfrac{s+2}{s+5}$

Le zéro est z_1 = ¡2 et le pôle est p_1 = ¡5. Le diagramme des pôles est donné dans la figure ci dessous. Le zéro est représenté par un cercle ("+"), et le pôle par une croix ("×").