Matière : Systèmes asservis

Chapitre II : Réponses temporelles des systèmes linéaires

Chapitre II : Réponses temporelles des systèmes linéaires

2.1 La réponse temporelle

L'étude temporelle d'un système consiste à déterminer sa réponse (sortie) $y(t)$ à un signal d'entré $u(t)$ qui varie en fonction du temps, comme l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, l'échelon unitaire $u\ (t)$ et la rampe unitaire $r(t)$. Cette réponse permet d'évaluer les performances en rapidité, précision, stabilité d'un système.

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelé réponse indicielle. L'objet de ce chapitre est d'étudier les réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre aux signaux de référence, auxquels se ramèneront les systèmes d'ordre supérieur, par approximation.

2.2 Calcul de la réponse d'un système

Dans le domaine de Laplace, La réponse d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est donnée par $Y(s) = \mathcal{L}\big(y(t)\big) = \mathcal{L}\big(g(t)*u(t)\big) = G(s)U(s)$

où : $g(t)$ est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert G(s).

La sortie $y(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. Il suffit pour cela d'utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction $G(s)U(s)$ étudiée au chapitre 1, puis les tables de transformées, pour effectuer l'inversion.

2.2.1 Systèmes du premier ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre un est régit par une équation différentielle du premier degré à coefficients constants. Sa fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. De manière plus générale, un tel système ne possède pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

où τ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :
− τ est la constante de temps du système,

− K est le gain statique : le signal d'entrée étant constant, $u(t)=u_0$, le signal de sortie $y(t)$ vaut K fois u_0 lorsque le système n'évolue plus ($dy(t)/dt$ =0). Le système est appelé élémentaire lorsque la dérivée de l'entrée $u(t)$ n'apparaît pas dans le seconde membre de l'équation différentielle. $\tau sY(s) + Y(s) = KU(s)$

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

d'où la fonction de transfert : $\boxed{G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{K}{1+\tau s}}$

Exemple 2.1 :

Soit le circuit RC suivant:

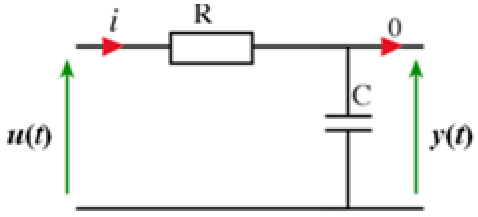

Figure2.1 : Circuit RC

On veut déterminer la relation entre l'entrée $u(t)$ (tension d'alimentation) et la sortie $y(t)$ (la tension aux bornes du condensateur). Par les lois de Kirchhoff nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} y(t)=\frac{1}{C}\int i(t)d(t) \\ i(t)=C\frac{dy(t)}{dt} \\ u(t)=Ri(t)+y(t) \end{cases}$$

En remplaçant le courant $i(t)$ par son expression dans la dernière équation. Il vient :

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

Alors la fonction de tr $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{1+RCs}$ par :
où τ = RC et K = 1.

Réponse impulsionnelle

On étudié la réponse du système à une entrée $u(t)$ = $\delta(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s)$ = 1. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s) \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{1+\tau s}\right) = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}u_{-1}(t)$$

paramètres du système à partir de l'intersection de la pente de la réponse à l'origine avec l'axe des abscisses, et de la valeur du signal de sortie à l'origine.

La Figure 3.2 montre la forme de cette réponse. Il est possible de déterminer les deux paramètres du système à partir de l'intersection de la pente de la réponse à l'origine avec l'axe des abscisses, et de la valeur du signal de sortie à l'origine.

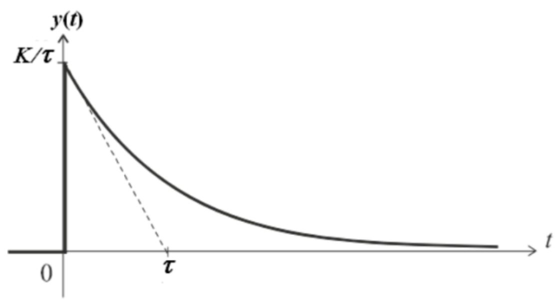

Figure 2.2 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Réponse indicielle

On étudié la réponse du système à une entrée $u(t)$ = $u_{-1}(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s)$ = 1/s. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{1+\tau s}\frac{1}{s}\right) = K(1-e^{-t/\tau})u_{-1}(t)$$

La Figure 2.3 montre un exemple d'évolution temporelle de la réponse indicielle d'un système d'ordre un. La détermination des paramètres τ et K du système s'effectue de manière simple, à partir de mesures graphiques sur cette courbe :

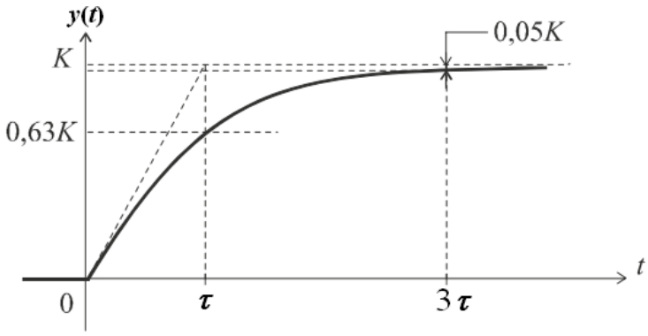

Figure 2.3 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

− le gain statique K s'obtient par le rapport de la variation du signal de sortie par la variation du signal d'entrée (quand t tend vers l'infini) :

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$$

− pour $t = \tau$, $y(\tau) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$. La valeur de τ se détermine alors pour une variation de la sortie de 63% de sa variation totale.
On peut aussi déduire, à partir de ce graphe, le temps de réponse t_r du système. Il représente le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur finale (on dit aussi de sa valeur en régime permanent) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de 3τ.
On $y(t_r) = K(1-e^{-t_r/\tau}) = 0.95K \Leftrightarrow (e^{-t_r/\tau}) = 0.05 \Leftrightarrow t_r = -\tau \ln 0.05 \approx 3\tau$:

Réponse à une rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire $u(t) = r(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1/s^2$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s^2} \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{1+\tau s}\frac{1}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(K\left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s+1/\tau}\right)\right)$$

d'où $$y(t) = K(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})u_{-1}(t)$$

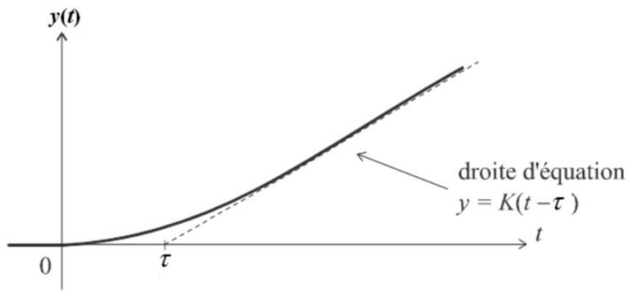

Figure 2.4 : Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe

2.2.2 Systèmes du second ordre

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre deux est régit par une équation différentielle du second degré à coefficients constants. Sa fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. De manière plus générale, un tel système ne possède pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\frac{1}{\omega_n}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}\frac{d\ y(t)}{dt}y(t)=Ku(t)$$

où ω_n, ξ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :

− ω_n est la pulsation propre non amortie (ou pulsation naturelle) du système,

− ξ est le coefficient (ou facteur) d'amortissement du système,

− K est le gain statique du système.

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres : $\frac{s^2}{\omega_n^2}Y(s)+\frac{2\xi s}{\omega_n}Y(s)+Y(s)=KU(s)$

d'où la fonction de transfert : $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi s}{\omega_n}+1}$$

Exemple 2.2 :
Soit le circuit RLC suivant:

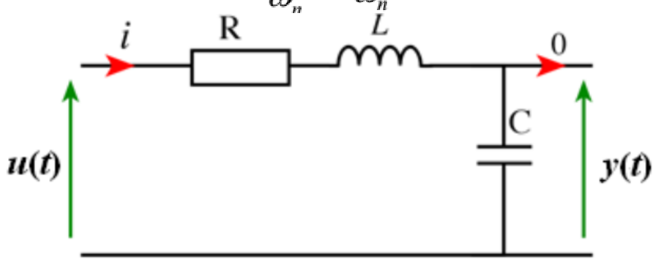

Figure 2.5 : Circuit RLC

Les lois de Kirchhoff donnent :

$$\mathrm{LC}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

Alors la fonction de transfert est donnée par : $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{\mathrm{LC}s^2+\mathrm{RC}s+1}$

où $\omega_n = 1/\sqrt{\mathrm{LC}}$ (Rad. S^{-1}), $\xi = \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{C}/4\mathrm{L}}$ et $K = 1$.

Réponse indicielle
On étudié la réponse du système à une entrée $u(t) = u_{-1}(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors $U(s) = 1/s$. L'expression de la sortie du système est :

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{K}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi s}{\omega_n}+1\right)}$$

L'étude des différentes formes de la sortie d'un système d'ordre deux s'effectue en analysant les racines de son polynôme caractéristique (pôles), donnée par le dénominateur de la fonction de transfert :

$$\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi s}{\omega_n}+1\right)=0$$

La nature de la réponse $y(t)$ dépend du signe du déterminant du polynôme caractérise : $\Delta = \frac{4}{\omega_n^2}(\xi^2 - 1)$

$$p_1, p_2 = -\xi\ \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Trois cas de figure se présentent selon le signe du déterminant de l'équation caractérise.

a) déterminant positif ($\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$)

Dans ce cas, on a :

$$y(t) = Ku_{-1}(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left[\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)e^{-\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} - \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)e^{-\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t}\right]u_{-1}(t)$$

À la Figure 2.6, on a représenté la réponse d'un système du second ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ. Dans ce cas, la réponse est apériodique.