

البرنامج الدراسي:

- 1- البرمجة الخطية
 - صياغة المسألة
 - الحل البياني
 - عرض الحل بطريقة السمبلكس
 - المسألة الثنائية وتحليل الحساسية
- 2- مشاكل النقل
 - صياغة المسألة
 - تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة
 - عرض الحل بطريقة الشبكة
- 3- مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود.

مراجع مقترحة

- د. محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، 2004.
- د. السعدي رجال: بحوث العمليات البرمجة الخطية، الطبعة الاولى، 2004.

البرمجة الخطية

La programmation linéaire

1- مفهوم البرمجة الخطية:

هي تقنية من تقنيات بحوث العمليات، وهي عبارة عن أسلوب يتضمن استخدام الرياضيات العالية لتقديم الحلول لأنواع معينة من المشاكل. والمقصود بكلمة خطية هو أن العلاقات المعمول بها تشبه العلاقات المتمثلة بالخطوط المستقيمة، أما المقصود بكلمة برمجة فهو التخطيط المنتظم أو عملية اتخاذ القرار.

ومن المواضيع التي تُستخدم فيها البرمجة الخطية هي:

في حالة التعظيم: Maximisation

- تعظيم الأرباح
- تعظيم طاقات التخزين
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال
- تعظيم استخدام اليد العاملة

في حالة التدنية: Minimisation

- تدنية التكاليف
- تدنية الخسائر
- تدنية عدد الموظفين

2- البرنامج الخطي:

2-1- مفهوم البرنامج الخطي:

هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين، هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية، في وجود مجموعة من القيود تكون في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

والمقصود من كلمة الأمثلية هو الوصول إلى أعظم قيمة للدالة الاقتصادية أو أدنى قيمة لها حسب الهدف.

2-2- مكونات البرنامج الخطي:

يتكون البرنامج الخطي من ثلاثة مكونات هي:

- **دالة الهدف:** تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية. وهي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه كتعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف، وتكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.

- **القيود:** هي عبارة عن جملة من المتباينات أو المعادلات أو هما معا تريد المؤسسة أن تجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الاعتبار. ويتكون القيد من قسمين: الأول عبارة عن عدد من المعاملات مضروبة في عدد من المتغيرات من الدرجة الأولى (الطرف الأيسر)، أما الثاني فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة (الطرف الأيمن).

- **عدم سالبية القيم:** يعني أن قيم كل المتغيرات ينبغي أن تكون أكبر من أو تساوي الصفر، لكونها ترتبط بكميات مادية، وهذه الأخيرة لا يمكن أن تساوي قيم سالبة. إلا أن هناك حالات خاصة تكون فيها المتغيرات سالبة وتتطلب حلولاً خاصة.

2-3- كتابة البرنامج الخطي:

يكتب البرنامج الخطي حسب حالة دالة الهدف كما يلي:

- في حالة التعظيم:

يكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$Z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

... ..

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

s/c

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

حيث: S/C ترمز الى: sous contraintes، أي تحت قيد.

$$Z_{\max} = CX$$

واختصارا يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- في حالة التدنية:

يكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \\ \left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \right\} s/c \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

واختصاراً يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned} Z_{\min} &= CX \\ \left. \begin{aligned} AX &\geq B \\ X &\geq 0 \end{aligned} \right\} s/c \end{aligned}$$

2-4- صيغ البرنامج الخطي:

هناك ثلاثة صيغ للبرنامج الخطي:

1- الصيغة القانونية: هناك نوعان:

حالة التعظيم: في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

• دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛

• التشكيلة الخطية لكافة القيود تكون في حالة أصغر من أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛

• كل المتغيرات تكون غير سالبة.

حالة التدنية: في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

• دالة الهدف تكون في حالة التدنية؛

• التشكيلة الخطية لكافة القيود تكون في حالة أكبر من أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛

• كل المتغيرات تكون غير سالبة.

2- الصيغة المختلطة: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في

حالة التدنية، وتكون القيود مختلطة حيث تحتوي على قيود إشارتها "أكبر من أو تساوي"

و "أصغر من أو تساوي" ومعادلات، أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

3- الصيغة النموذجية: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في

حالة التدنية، والقيود عبارة عن معادلات، وجميع المتغيرات غير سالبة.

3- بناء البرنامج الخطي:

ويقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية إلى مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح متكون من عدد من المتغيرات، به دالة هدف تكون إما في حالة التعظيم أو التذنية، وعدد من القيود تكون إما في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا.

مثال:

تقوم مؤسسة لصناعة الأثاث بإنتاج نوعين من المنتجات: الطاولات والكراسي. يتطلب إنتاج طاولة واحدة ساعتين عمل ووحدين من رأس المال، في حين أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 ساعات عمل ووحدة واحدة من رأس المال. أما عن الكميات من ساعات العمل ورأس المال المتوفرة للمؤسسة فهي محدودة وتقدر بـ 12 ساعة و 8 وحدات على التوالي.

تحقق المؤسسة ربحاً عن كل طاولة يتم إنتاجها وبيعها بـ 6 وحدات نقدية، وعن كل كرسي يتم إنتاجه وبيعه بـ 7 وحدات نقدية.

المطلوب: اكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة؟

الحل:

المقادير القصوى	المقادير الوجودية		المنتجات عوامل الإنتاج
	X ₂ (الكراسي)	X ₁ (الطاولات)	
12 ساعة	3	2	ساعات العمل
8 وحدات	1	2	رأس المال
	7	6	الربح الوجودي

$$Z_{\max} = 6x_1 + 7x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$