حل البرامج الخطية:
الطريقة البيانية

1.الحل بالطريقة البيانية

تُستخدم الطريقة البيانية عادة لحل المسائل التي تحتوي على متغيرتين على الأكثر.

ويكون الحل حسب الخطوات التالية:

1- نحول كل متباينات القيود إلى معادلات؛

2-على معلم متعامد نرسم الخطوط المستقيمة للمعادلات المحصل عليها في الخطوة الأولى، ويكفي لذلك أن نحدد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما؛

3- نحدد منطقة الحلول الممكنة: منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يمثل قيد إشارته اصغر من أو يساوي توجد أسفل المستقيم، في حين أن منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لمستقيم يمثل قيد إشارته أكبر من أو يساوي توجد فوق المستقيم. ومنطقة الحلول الممكنة لجميع القيود هي تلك المنطقة التي تُحقق جميع القيود، وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس (قلنا في الغالب لأن منطقة الحلول الممكنة يُمكن أن تكون عبارة عن مستقيم).

4- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها مع الصفر ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، ويكفي لرسم هذا المستقيم أن نحدد نقطة واحدة فقط نظرا لأن هذا المستقيم يمر من نقطة المبدأ. ونسمي هذا المستقيم **بالمستقيم** Δ

5- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية إلى الأعلى اتجاه رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة (حيث أن احد رؤوس المضلع يشكل نقطة الحل الأمثل). وتكون النقطة التي تحقق أمثل قيمة لدالة الهدف هي آخر رأس يصل إليه المستقيم Δ في حالة التعظيم، وأول رأس يصل إليه في حالة التدنية.

نظرية: إذا وُجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند احد رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة.

مثال 1:

$$Z_{max}= 6x_1+7x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 12 \\ 2x_1+x_2\leq 8 \\ x1\geq 0,\ x2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم 1

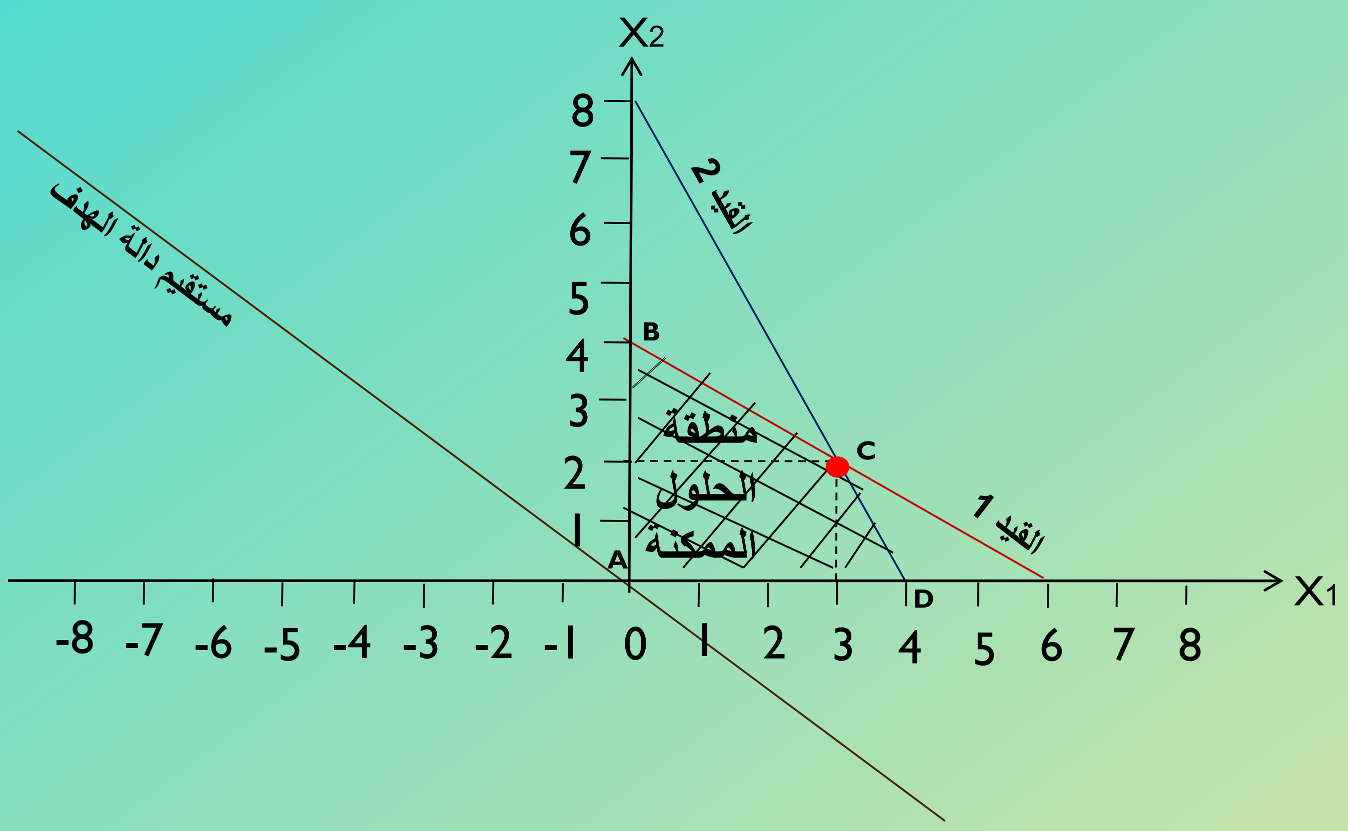
$2x_1+3x_2=12$	
X_1	X_2
0	4
6	0

المستقيم 2

$2x_1+1x_2=8$	
X_1	X_2
0	8
4	0

المستقيم Δ

$6x_1+7x_2=0$	
X_1	X_2
0	0
7-	6



نحرك مستقيم Δ نحو الأعلى، وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم، فإن آخر رأس نصل إليه هو الرأس C.

إذا، تصل المؤسسة إلى أعظم ربح يُمكن تحقيقه في ظل الموارد المتوفرة المحدودة (ساعات العمل ورأس المال) عند 32 وحدة نقدية بإنتاج 3 طاولات وكرسيين. ومنه:

$$x_1=3$$

$$x_2=2$$

$$Z_{max}= 6(3)+7(2)=32$$ وحدة نقدية

مثال 2 :

$$Z_{min}= 2x_1+6x_2$$

$$s/c \begin{cases} 2x_1+3x_2 \geq 12 \\ 2x_1+x_2 \geq 8 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

المستقيم 1

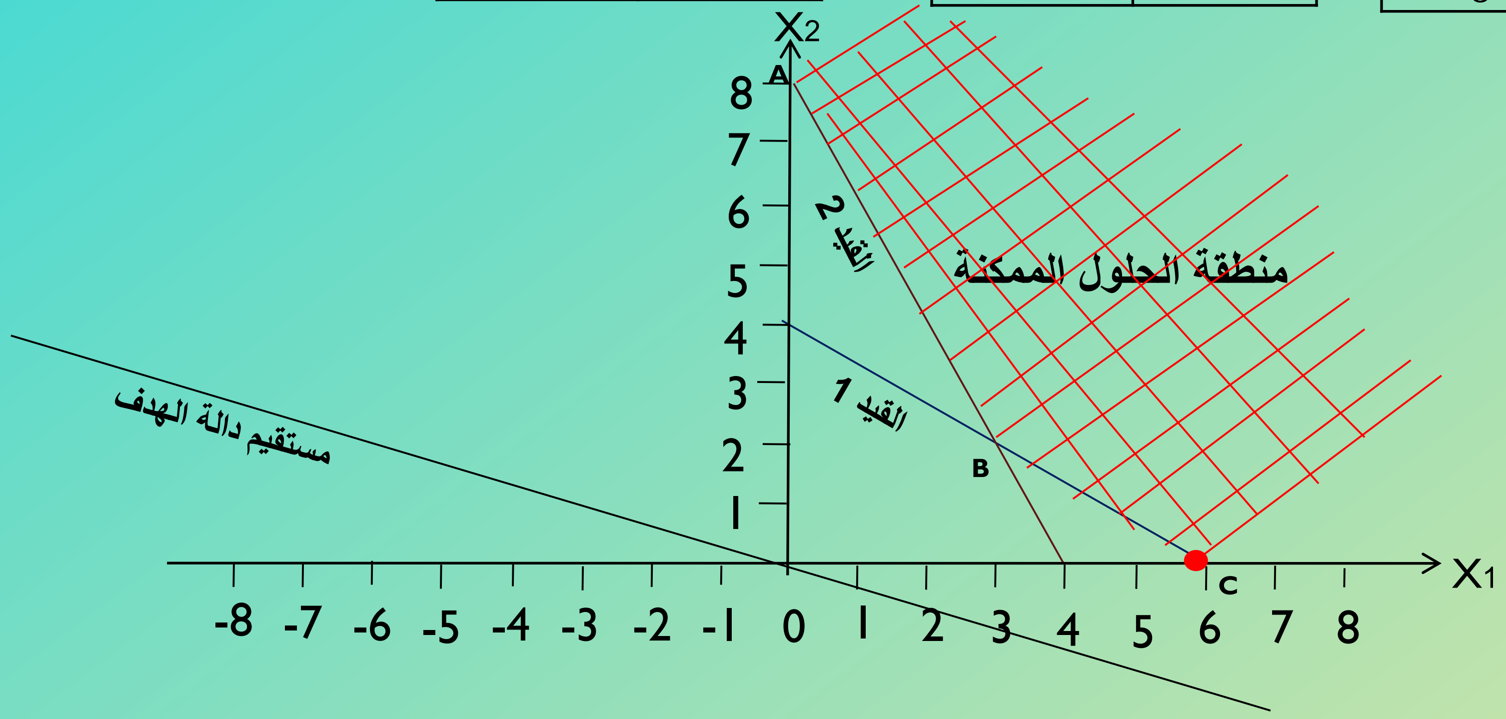
$2x_1+3x_2=12$	
X_1	X_2
0	4
6	0

المستقيم 2

$2x_1+1x_2=8$	
X_1	X_2
0	8
4	0

المستقيم Δ

$2x_1+6x_2=0$	
X_1	X_2
0	0
6-	2



نحرك مستقيم Δ نحو الأعلى، وبما أن دالة الهدف في حالة التدنية، فإن أول رأس نصل إليه هو الرأس C.

إذا:

$$x_1=6$$

$$x_2=0$$

$$Z_{min}= 2(6)+6(0)=12$$ وحدة نقدية

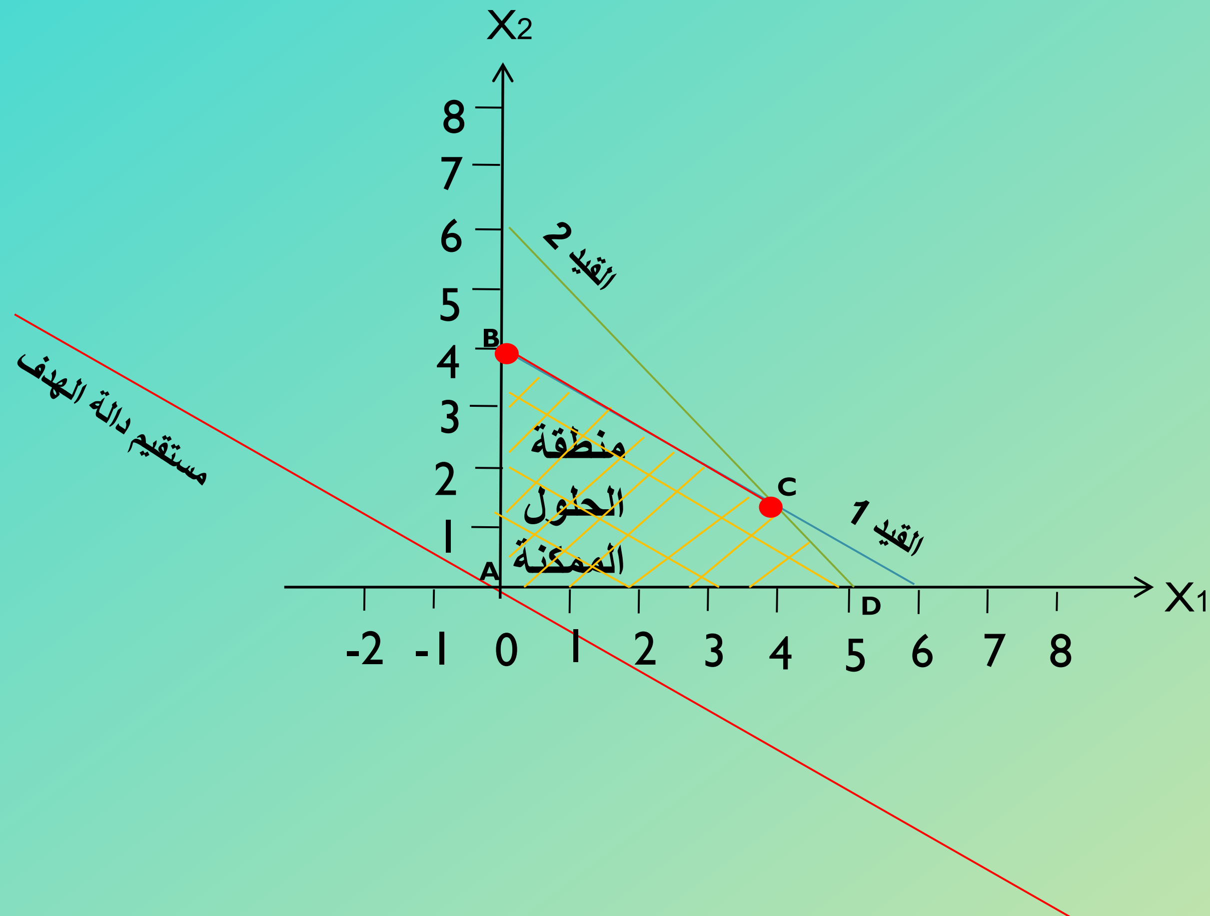
وهي أدنى تكلفة يُمكن تحقيقيها.

2.حالات خاصة

•**تعدد الحلول:** هي الحالة التي يكون فيها على الأقل رأسين من رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة يتماسان في آن واحد مع المستقيم Δ، بحيث يكون آخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنية.

مثال:

على افتراض أنه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين إشارتهما اصغر من أو يساوي، ودالة الهدف في حالة التعظيم:

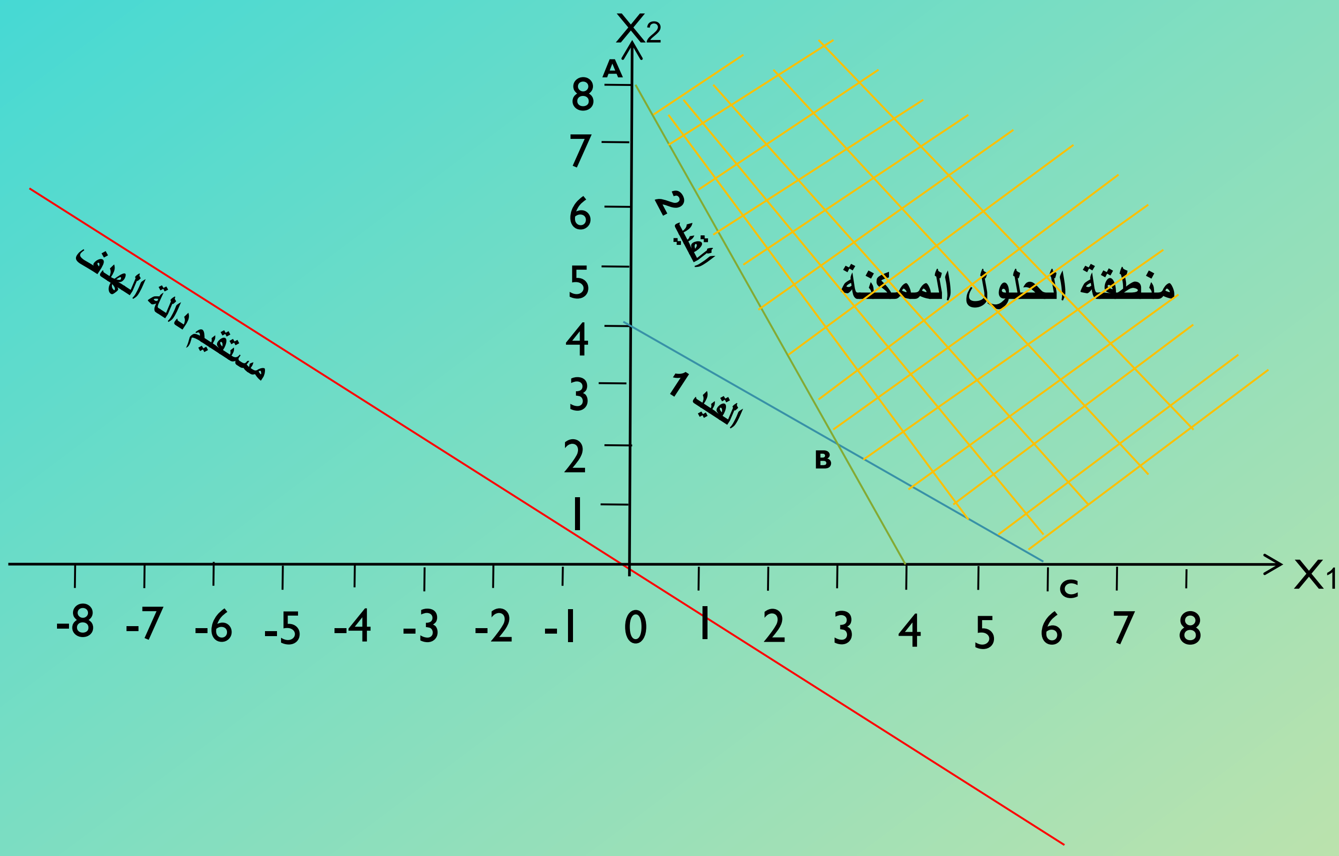


نحرك مستقيم Δ نحو الأعلى، وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم، فإننا نصل إلى آخر رأسين في آن واحد: الرأس B والرأس C. وهذا يعني أن جميع النقاط على المستقيم الرابط بين النقطتين B و C هي نقاط مثلى، بمعنى أن أية نقطة على هذا المستقيم تعطينا قيم مختلفة من X_1 و X_2 لكن تعطينا كلها نفس قيمة دالة الهدف.

• **لا نهائية الدالة الاقتصادية:** تحدث مثل هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول مفتوحة، كما يُمكن أن تحدث سواء كانت دالة الهدف في حالة التعظيم أو التقليل.

مثال:

على افتراض انه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين اكبر من أو تساوي ودالة الهدف في حالة التعظيم :

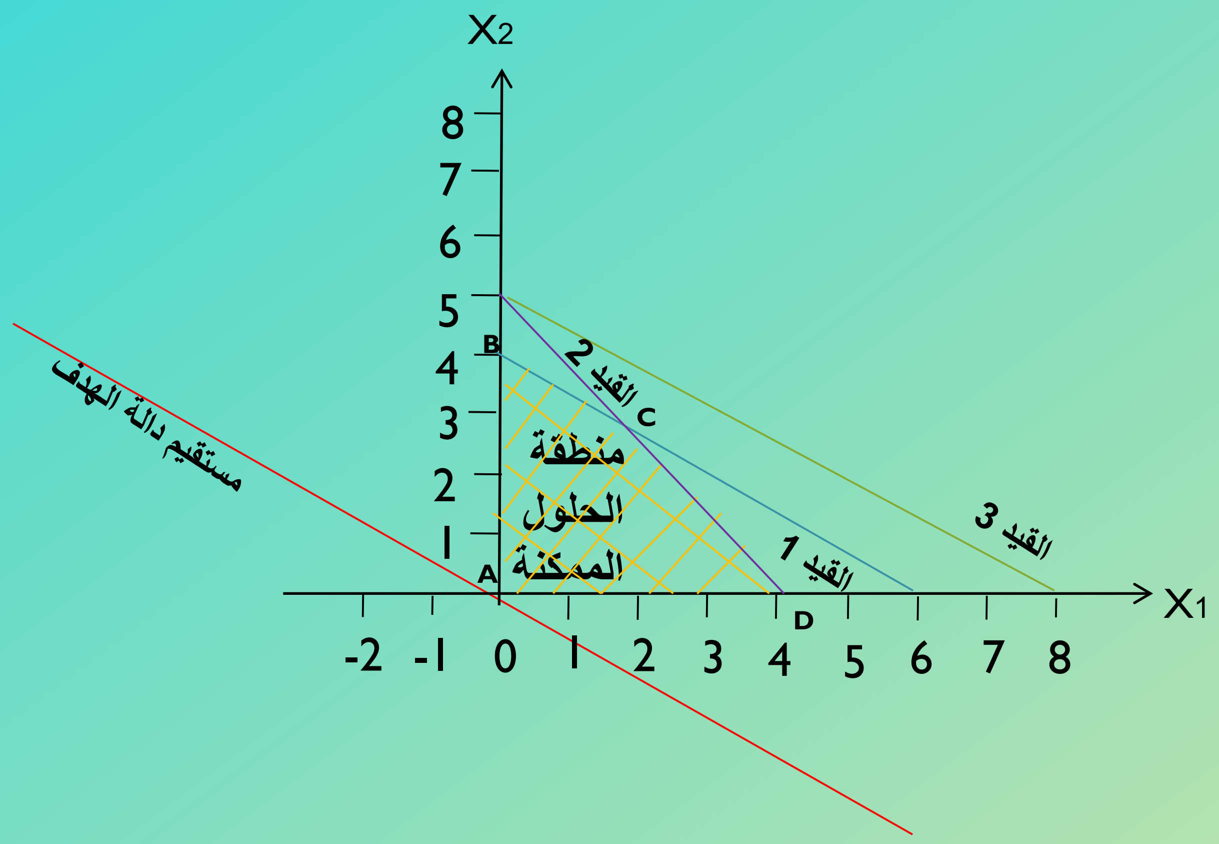


يُلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي منطقة مفتوحة، وبما أن دالة الهدف في حالة التعظيم فلا يُمكن الوصول إلى آخر رأس عند التحرك بمستقيم دالة الهدف نحو الأعلى. لكن لو إفترضنا أن دالة الهدف في حالة التقليل، ففي هذه الحالة يُمكن إيجاد نقطة الحل الأمثل وهي أول نقطة نصلها والمتمثلة في النقطة B.

•**حالة حياد احد القيود:** عند تعدد القيود يمكن أن نجد أن أحد المستقيمات الممثلة لهذه القيود أو أكثر لا يؤثر في تحديد منطقة الحلول الممكنة، وحينها يكون هذا القيد حياديا، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج.

مثال:

على إفتراض أنه لدينا برنامج خطي متكون من ثلاثة قيود إشارتها اصغر من أو يساوي، ودالة الهدف في حالة التعظيم كما يلي:

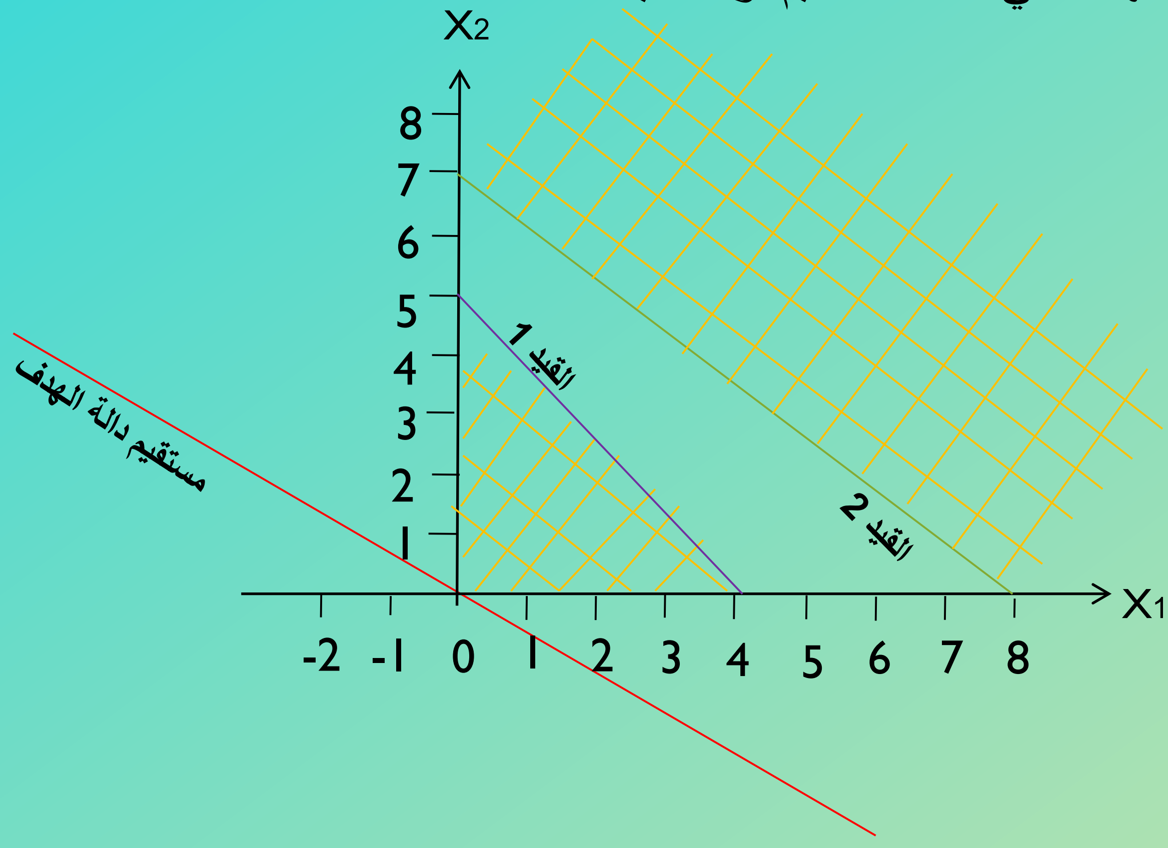


يُلاحظ أن حذف القيد رقم 3 سوف لن يغير من منطقة الحلول الممكنة، وبالتالي فهو قيد حيادي.

• **حالة استحالة الحل:** هي الحالة التي لا يُمكن فيها تحديد منطقة حلول ممكنة تحقق جميع قيود البرنامج الخطي.

مثال:

على إفتراض أنه لدينا برنامج خطي متكون من قيدين احدهما إشارته أكبر من أو يساوي، والأخر إشارته اصغر من أو يساوي، ودالة الهدف في حالة التعظيم او التدنية:



يُلاحظ أنه لا يُمكن تحديد منطقة حلول ممكنة تحقق القيدين معا، وبالتالي فالحل مستحيل.