Chapitre *04*

Variables aléatoires

Après avoir réalisé une expérience, on s'intéresse souvent à une certaine fonction du résultat et non au résultat en lui-même. Un nombre est associé à chaque résultat de l'expérience : nombre de particules émises par un élément radioactif durant un intervalle de temps donné, puissance moyenne d'un "bruit" accompagnant la réception d'un signal radio, nombre d'enfants dans une famille, etc. Ces grandeurs (ou fonctions) auxquelles on s'intéresse sont en fait des fonctions réelles définies sur l'ensemble fondamental et sont appelées **variables aléatoires**.
On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P.

Définition 4.1. Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, telle que que l'inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ est un événement de Ω.

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. les variables aléatoires discrètes ;
2. les variables aléatoires continues.

4.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 4.2. Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées (exemple : valeurs entières).

Exemple 4.1. En lançant un dé à six faces numérotées et en observant la face supérieure, l'ensemble fini des valeurs obtenues est : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

4.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est à dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si l'on définit la probabilité $p(X = x_i) = p_i$ des valeurs x_i. Cette probabilité $p(X = x_i) = p_i$, est appelée la distribution ou la loi de probabilité de X, que l'on donne habituellement sous la forme du tableau suivant (tableau 4.1) :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_3)$	$\ldots$	$p(X = x_n)$

Table 4.1 – La loi d'une variable aléatoire

La loi de probabilité satisfait les conditions :

$$0 \leq p(X = x_i) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1.$$

Exemple 4.2. On jette une paire de dès bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), ..., (6,5), (6,6)\}.$$

On suppose que la v.a. X est le maximum de point (a, b) de Ω, c'est-à-dire $X(a, b) = max(a, b)$; alors X sera définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\begin{aligned}
p(X = 1) &= p(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36};\\
p(X = 2) &= p(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) = \frac{3}{36};\\
p(X = 3) &= p(\{(1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}) = \frac{5}{36};\\
p(X = 4) &= p(\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}) = \frac{7}{36};
\end{aligned}$$

de la même façon :

$$p(X = 5) = \frac{9}{36} \text{ et } p(X = 6) = \frac{11}{36}.$$

Cette information se résume dans le tableau 4.2.

On suppose maintenant une autre variable aléatoire Y, c'est la somme de composantes des couples (a, b), c'est-à-dire $Y(a, b) = a + b$; alors Y est définie par :

$$Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

La distribution de Y est donnée dans le tableau 4.3.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

TABLE 4.2 – La distribution de la v.a. X.

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

TABLE 4.3 – La distribution de la v.a. Y.

4.1.2 Fonction de distribution et de répartition

1. **Fonction de distribution**
   Cette fonction indique la loi de probabilité de la v.a. X. Elle est représentée par un diagramme en bâtons.

   Exemple 4.3. Les diagrammes qui suivent, donnent une description graphique des distributions des variables aléatoires X (voir figure 4.1) et Y (voir figure 4.2) de l'exemple précédent.

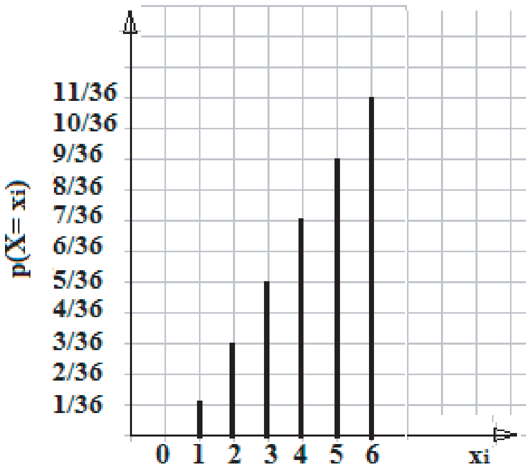

FIGURE 4.1 – Distribution de la v.a. X.

2. **Fonction de répartition**
   La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x. La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

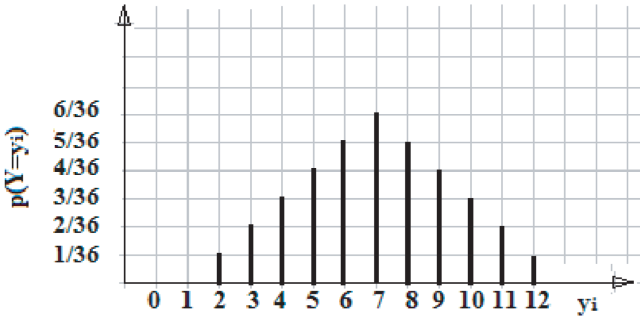

FIGURE 4.2 – Distribution de la v.a. Y.

Remarque 4.1. La représentation graphique de la fonction de répartition de le cas discret prend la forme d'un diagramme en escaliers (voir figure 4.3).
F est monotone croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Exemple 4.4. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1\,; \\ \frac{1}{36}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{4}{36}, & \text{si } 2 \leq x < 3\,; \\ \frac{9}{36}, & \text{si } 3 \leq x < 4\,; \\ \frac{16}{36}, & \text{si } 4 \leq x < 5\,; \\ \frac{25}{36}, & \text{si } 5 \leq x < 6\,; \\ \frac{36}{36} = 1, & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

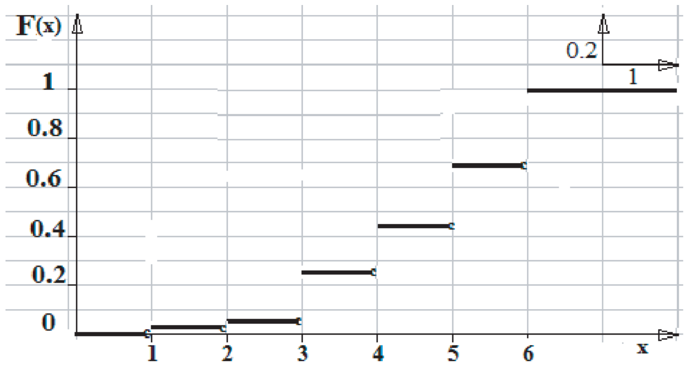

FIGURE 4.3 – Courbe de la fonction de répartition de la v.a. X.

4.1.3 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.3. Soit X une variable aléatoire ayant la loi de probabilité $p(X = x_i)_{i=\overline{1,n}}$. La moyenne ou l'espérance mathématique de X que l'on note $E(X)$ ou μ_x est la somme des valeurs prises par X pondérées par les probabilités qui leur sont associées (la valeur prise en moyenne par cette v.a.), elle est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1p(X = x_1) + x_2p(X = x_2) + ... + x_np(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_ip(X = x_i). \end{aligned}$$

Exemple 4.5. On reprend l'exemple 4.2.
• L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_ip(X = x_i) \\ &= 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36} = 4,47 \end{aligned}$$

• L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} y_ip(Y = y_i) \\ &= 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7. \end{aligned}$$

Propriétés de $E(X)$

Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
4. $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4.1.4 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.4. La moyenne d'une variable aléatoire X mesure, dans un certain sens, la valeur moyenne de X et la variance (ou sa racine carrée est l'écart-type) exprime à quel point les valeurs prises par une variable aléatoire X sont dispersées autour de la moyenne.

1. **Variance de la variable aléatoire X**
   La variance de X, que l'on note $V(X)$ est définie par
   $$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$$
   ou
   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i))^2.$$
2. **Écart type de la variable aléatoire X**
   L'écart type de X, que l'on note $\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$:
   $$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 4.6. Considérons les variables aléatoires X et Y de l'exemple 4.2, avec leurs moyennes $E(X) = 4,47$ et $E(Y) = 7$.

- La variance de la variable aléatoire X est donnée par $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) \\ &= 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2.\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36} \\ &= \frac{191}{36} = 21,97. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 21,97 - (4,47)^2 = 1,99$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,99} = 1,4$.

- La variance de la variable aléatoire Y est donnée par $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 p(Y = y_i) \\ &= 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} + 8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36} \\ &= = 54,8. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 54,8 - (7)^2 = 5,8$ et $\sigma(Y) = \sqrt{5,8} = 2,4$.

Propriétés de $V(X)$ et $\sigma(X)$

Désignons par X une variable aléatoire définie sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $V(X + \alpha) = V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

D'où

1. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma(\alpha X) = |\alpha|\sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.2. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ, on définit la variable aléatoire centrée réduite X^* correspondant à X par

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

avec $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.

4.2 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle $]a, b]$.

Exemple 4.7. Le poids d'un enfant à la naissance est compris entre $2,7$ kg et $5,6$ kg.

4.2.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

La fonction F_X indique la probabilité que X soit strictement inférieure à tout x de l'intervalle de définition.

Propriétés

1. $F_X(x)$ est positive et : $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. Si la fonction F_X est continue et admet une dérivée, la variable aléatoire est dite absolument continue.

3. La représentation graphique de F_X prend la forme d'une courbe cumulative.

Remarque 4.3. Dans le cas d'**une variable aléatoire continue**, on a :

1. La probabilité attachée à un point x est nulle : $p(X = x) = 0$.
2. $p(X \leq x) = p(X < x) + p(X = x) = p(X < x)$.
3. La probabilité que la v.a. $X \in [a, b]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= p(X < b) - p(X < a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

4.2.2 Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est l'intervalle $[a, b]$. Rappelons que par définition

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La fonction f est la distribution (densité de probabilité) de la variable aléatoire continue X. Cette fonction satisfait les conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

4.2.3 Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f, dont le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$.

1. **Espérance mathématique**
   L'espérance mathématique de la v.a. X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

2. **Variance et écart type**
   La variance de la v.a. X est définie par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

   Par définition, l'écart type est donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 4.8. Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité (fonction de distribution) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - x), & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 0, & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

1. La densité de probabilité vérifie :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2] \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

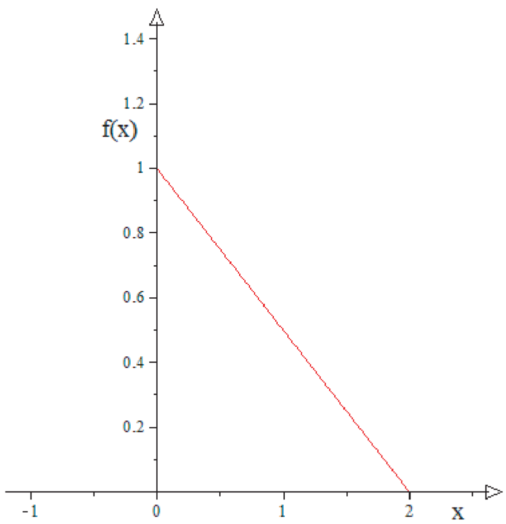

FIGURE 4.4 – Densité de probabilité de la v.a. X.

En effet,

$\forall x \in [0,2]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs ;

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}[2x - \frac{x^2}{2}]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(4-2-0) = 1.
\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F est :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 1, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

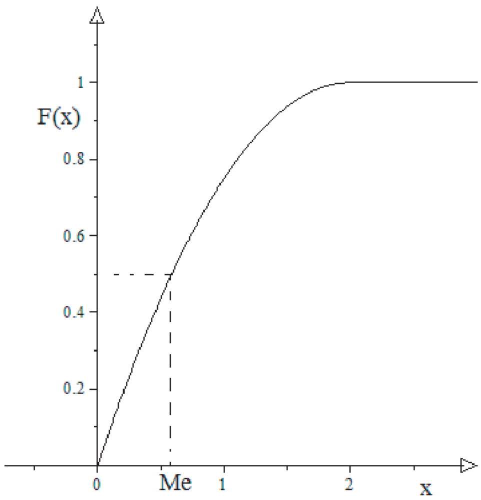

FIGURE 4.5 – Fonction de répartition de la v.a. X.

3. L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x(2-x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}[x^2-\frac{x^3}{3}]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. La variance de X :

$$\begin{aligned} V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx-E(X)^2 &= \int_0^2 x^2f(x)dx-E(X)^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2(2-x)dx-(\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2-x^3)dx-(\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}]_0^2-(\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

5. L'écart type de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4.2.4 Médiane et mode d'une variable aléatoire continue

La médiane

La médiane d'une variable aléatoire continue est le nombre réel Me tel que

$$F(Me)=0.5=\frac{1}{2}.$$

Autrement dit, la médiane c'est la valeur Me de X tel que $p(X<Me)=0.5$.

Le mode

Le mode Mo est la valeur de X, qui correspond à un maximum de la fonction de densité. Il peut exister plusieurs modes, si il existe un seul maximum la densité est dite unimodale.

Exemple 4.9. Dans l'exemple 4.8, on a

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \text{ ou } x = \frac{4+\sqrt{8}}{2}.$$

$$x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \simeq 0,5857864376 \in [0;2]$$

et

$$x = \frac{4+\sqrt{8}}{2} \simeq 3.414213562 \notin [0;2],$$

alors

$$Me = \frac{4-\sqrt{8}}{2}.$$

f admet un maximum pour la valeur de $x = 0$, alors $Mo = 0$.