المحاضرة السادسة:

- تقدير مجال الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين مستقلين $(\mu_1 - \mu_2)$
- تقدير مجال الثقة للنسبة (P) والفرق بين نسبتين $(P_1 - P_2)$

أولا: تقدير مجال الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين مستقلين:

وفيما يلي سوف نجد مجال الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين في حالات مختلفة:

1- عند معلومية تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2:

إذا كان: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن:

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

ومنه نجد أن:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

حيث بحل المتباينة بالنسبة إلى $\mu_1 - \mu_2$ نجد أن:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال (**التمرين الأول من السلسلة 3**): سحبت عينات من مجتمعين طبيعيين مستقلين من الطلبة الجامعيين وكانت كل عينة تمثل سرعة إنجاز تمرين معين والعينتان هما:

$$X_1 : 20,18,22,22,18,25,25,20$$
$$X_2 : 25,22,24,23,25,30,30,27,20$$

المطلوب: أوجد مجال ثقة 95% للفرق بين متوسطي إنجازي المجوعتين في حالة تباين المجتمع الأول 6، وتباين المجتمع الثاني 12.

الحل:

نحسب في البداية وسطي العينتين:

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{170}{8} = 21.25$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{226}{9} = 25.11$$

لدينا $\sigma_1^2 = 6$ و $\sigma_2^2 = 12$ وحجم العينات $n_1 = 8$ و $n_2 = 9$، حيث أن $1 - \alpha = 0.95$ إذن:

$\alpha = 0.05$ ومنها : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ وبالتالي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي).

فيكون مجال الثقة كما يلي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le (\mu_1-\mu_2) \le (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$-3.86-1.96\sqrt{\frac{6}{8}+\frac{12}{9}} \le (\mu_1-\mu_2) \le -3.86+1.96\sqrt{\frac{6}{8}+\frac{12}{9}}$$

$$-6.69 \le (\mu_1-\mu_2) \le -1.03$$

وهذا يعني أننا واثقين بنسبة 95% أن الفرق بين متوسطي إنجاز المجتمعين المجهولين يقع في المجال [-6.69، -1.03].

2- عند مجهولية تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_1^2: هناك حالتين:

2-1- إذا كان $n_1,n_2 \ge 30$:

في هذه الحالة نقدر تباين كل مجتمع بتباين عينة عشوائية تسحب منه، ونستبدل تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 بتباين العينتين S_1^2 و S_2^2 في مجال الثقة للحالة السابقة، فيُصبح مجال الثقة لهذه الحالة كما يلي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < (\mu_1-\mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

مثال: أوجد مجال ثقة 98% للفرق بين وسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين إذا علمت أن: حجم العينة الأولى 160 و وسطها 81.2، و الإنحراف المعياري لها 7.6 و حجم العينة الثانية 90 و وسطها 76.4 والإنحراف المعيارى لها 8.2؟.

الحل:

من المسألة نجد أن:

$$n_1 = 160 \qquad ,\overline{X}_1 = 81.2, \qquad ,S_1^2 = 7.6$$

$$n_2 = 90 \qquad ,\overline{X}_2 = 76.4, \qquad ,S_2^2 = 8.2$$

ولاحظ أن $\alpha = 0.02$ ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد أن: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$ فيكون مجال الثقة المطلوب كما يلي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le (\mu_1-\mu_2) \le (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$4.8-2.33\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}} \le (\mu_1-\mu_2) \le 4.8+2.33\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}}$$

$$3.94 \le (\mu_1-\mu_2) \le 5.66$$

هذا يعني أننا واثقين بنسبة 98% أن الفرق بين متوسطي إنجاز المجتمعين المجهولين يقع في المجال [3.94، 5.66].

2-2- إذا كان: $n_1,n_2 < 30$ (أو أحدهما أقل من 30)، وكان تباينا المجتمعين غير متساو فإن مجال الثقة:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1-\mu_2) \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

مثال: (**التمرين الثاني من السلسلة 3**): سُحبت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين من الطلبة الجامعيين وكانت كل عينة تمثل سرعة إنجاز تمرين معين والعينتان هما:

$$X_1 : 20,21,25,30,22,23,24,25$$

$$X_2 : 15,17,16,12,19,18,14,13,14$$

المطلوب: أوجد مجال ثقة 90% للفرق بين متوسطى إنجازي المجوعتين في حالة مجهولية تبايني المجتمعين .

الحل:

لدينا: $\overline{X}_1 = 23.75$ و $\overline{X}_2 = 15.33$ وحجم العينتين $n_1 = 8$ و $n_2 = 9$ وهما أقل من 30، ومن جدول توزيع (t) نجد أن: $(t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}) = (t_{0.05,15}) = 1.75$

بحساب تباين العينتين نجد أن: $S_1^2 = 7.618$ و $S_2^2 = 11.628$، وبالتالي يكون مجال الثقة المطلوب هو:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1-\mu_2) \leq (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$4.8 - 1.75\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}} \leq (\mu_1-\mu_2) \leq 4.8 + 1.75\sqrt{\frac{7.6}{160}+\frac{8.2}{90}}$$

$$4.15 \leq (\mu_1-\mu_2) \leq 5.45$$

وهذا يعني أننا واثقين بنسبة 98% أن الفرق بين متوسطي إنجاز المجتمعين المجهولين يقع في المجال [4.15، 5.45].

ثانيا: تقدير مجال الثقة للنسبة:

درسنا في الفصل السابق توزيع النسبة للعينة من مجتمع ذي الحدين، وسوف نتحدث الآن عن إيجاد مجال الثقـــة للنسبة عندما يكون حجم العينة $n \geq 30$.

عرفنا نسبة عدد النجاحات في العينة بأنها $\hat{p} = \frac{x}{n}$، حيث (X) عدد النجاحات وقلنا أن هذه النسبة تمثل متغير عشوائي له تويع احتمالي يسمى توزيع النسبة بوسط حسابي $\mu_{\hat{p}} = P$، حيث (P) نسبة عدد النجاحـــات في المجتمع، وبتباين $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p(1-p)}{n}$.

وتعلم أن: $\frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}} \sim N(0\ ,\ 1)$ ، حيث : $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$، وقلنا أنه في حالة عدم معرفة (P) نقدرها بالنسبة $(\hat{P})$.

نعرف مجال ثقة $(1-\alpha)\%$ للنسبة بأنها المجال التي تحقق ما يلي:

$$p_r\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{P\text{ - }P}{\sigma_{\hat{p}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وتكون مجال الثقة:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{P}\text{ - }P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1\text{-}\hat{P})}{n}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1\text{-}\hat{P})}{n}} \le p \le \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1\text{-}\hat{P})}{n}}$$

يسمى المقدار $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1\text{-}\hat{P})}{n}}$ حد $(1-\alpha)\%$ للخطأ في تقدير (P) والجدير بالذكر أن (P) قد تتوفر لدينا من معلومات سابقة، ولكنها غالباً ما تكون مجهولة، و في أسوأ الظروف اعتبار أن $P = \frac{1}{2}$، حيث تعطي هذه القيمة أكبر خطأ ممكن أن نحصل عليه.

فإذا تم تحديد أكبر خطأ مسموح به في تقدير P وليكن d فإننا نكون قادرين على حساب حجم العينة اللاّزم لتحقيق ذلك الحد من الخطأ، وبناءاً عليه يكون حجم العينة المطلوب هو:

1- في حالة معرفة P:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \le d \Rightarrow \frac{P(1-p)}{n} \le \left(\frac{d}{Z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2$$

$$n \ge \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2 p(1-p)$$

مثال: لإيجاد مجال الثقة 95% لنسبة عدد الطلبة في المدارس الإبتدائية الذين يستعلون النظارات الطبية، أخذت عينة عشوائية حجمها 900 طالب فوجد أن عدد مستعملي النظارات الطبية 100 طالب،

المطلوب: أوجد مجال الثقة المطلوب.

الحل: بما أن: $\alpha = 0.05$ إذن: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$، ولاحظ أن نسبة عدد من يستعمل النظارات في المدارس الإعدادية مجهول لذلك سنقدره بنسبة العينة كما يلي:

$$\hat{P} = \frac{x}{n} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$$

فيكون مجال الثقة المطلوب هو:

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\frac{1}{9} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{900}} \leq p \leq \frac{1}{9} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{900}}$$

$$0.091 \leq p \leq 0.131$$

ي أننا واثقين بنسبة 95% أن نسبة الطلبة في المدارس الإبتدائية الذين يستعملون النظارات الطبية (P) يقـــع في المجال [9.1%، 13.1%].

سابعا: تقدير مجال الثقة للفرق بين نسبتين:

نعلم أنه إذا كان $X_1 \sim b(N_1, P_1)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_1 \geq 30$، و $X_2 \sim b(N_2, P_2)$، وسُحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_2 \geq 30$ وكان المجتمعين مستقلين فإن:

$$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1 - P_2$$

$$\sigma^2_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

وأن توزيع فرق النسب المعياري:

$$\frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} \sim N(0\ ,\ 1)$$

في حالة مجهولية P_1، P_2 نأخذ: $\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$

وبالتالي يكون مجال $(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين النسب هو:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}$$

مثال: (**التمرين الثالث من السلسلة 3**): سجلت 80 حالة نجاح عملية في مستشفى (A) من بين 90 عملية، وفي المستشفى (B) سجلت 50 عملية نجاح من بين 70 عملية.

المطلوب: أوجد مجال الثقة 90% للفرق بين نسبتي النجاح في المستشفيين؟.

الحل: من المسألة نجد أن:

عند مستوى ثقة 90% تكون: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.64$.

$$\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

$$\hat{P}_8 = \frac{x_2}{n_1} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$$

$$\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}}{90} + \frac{\frac{5}{7}\times\frac{2}{7}}{70}} = 0.063$$

وتكون مجال الثقة هو:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$$

$$\left(\frac{8}{9} - \frac{5}{7}\right) - 1.64 \times 0.063 \leq P_1 - P_2 \leq \left(\frac{8}{9} - \frac{5}{7}\right) + 1.64 \times 0.063$$

$$0.071 \leq P_1 - P_2 \leq 0.278$$

أي أننا واثقين بنسبة 90% أن الفرق بين نسبتي نجاح العمليات الجراحية في المجتمعين المجهولين يقـــع في المجـــال [7.1%، 28.7%].