Chapitre 3

Systèmes linéaires à coefficients constants

3.1 Méthode de l'exponentielle de matrice

3.1.1 L'exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\begin{cases} A^k = \underbrace{A...A}_{k \text{ fois}} \text{ si } k \in \mathbb{N}^*, \\ A^0 = I_n. \end{cases}$ Ici I_n représente la matrice identité.

Considérons la série définie comme suit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} = \lim_{l \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{1!} + ... + \frac{A^l}{l!} \right),$$

avec $\begin{cases} k! = 1.2...k \text{ si } k \in \mathbb{N}^*, \\ 0! = 0. \end{cases}$

Lemme 3.1.1 *La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.*

Preuve 25 *On a $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Mais $\frac{\|A\|^k}{k!}$ représente le terme général d'une série* *numérique convergente, alors* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *est normalement convergente. Donc, elle est convergente.*

Définition 3.1.1 *L'exponentielle de la matrice* A*, noté* e^A*, est la quantité* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$*. C. à dire* $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Exemple 17 *Calculons l'exponentielle de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *: Montrons, par récurrence, que pour tout* $k \geq 1$ *on a* $A^k = A$.

Pour $k = 1$*, on a* $A^1 = A$.

On suppose que $A^k = A$ *alors*

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

C. à dire, $A^{k+1} = A$.

Ainsi

$$\begin{aligned} e^A \quad : &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \frac{A^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=l} \frac{A}{k!} \\ &= I_n + \lim_{l \to +\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{k=l} \frac{1}{k!} \right) A \right) = I_n + \left(\lim_{l \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=l} \frac{1}{k!} \right) A \\ &= I_n + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) A = I_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} \right) A \\ &= I_n + \left(e^1 - 1 \right) A = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est à dire, $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 3.1.1 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *On a* $e^{0_n} = I_n$. *Ici,* 0_n *représente la matrice nulle.*

2. *Si* A *et* B *commutent, c. à dire* $AB = BA$, *alors* $e^{A+B} = e^A e^B$.

3. e^A *est une matrice inversible et on a* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

4. *La fonction :* $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ *est dérivable et on a* $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve 26 1. *On a*

$$e^{0_n} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = \frac{0_n^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(0_n)^k}{k!} = I_n + 0_n = I_n.$$

2. *On a*

$$e^A e^B := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n,$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} A^p B^{n-p} \\ &\overset{AB=BA}{=} \frac{1}{n!} (A+B)^n \quad \textit{(Formule de binôme).} \end{aligned}$$

Donc

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}.$$

3. *Puisque* $A(-A) = (-A)A$, *alors* A *et* $(-A)$ *commutent donc* $e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}$. *Mais* $e^{A+(-A)} = e^{0_n} = I_n$. *Alors* $e^A e^{-A} = I_n$. *Ce qui implique le résultat.*

4. *De la définition de* e^{tA}, *on trouve que la fonction :* $\begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\left(e^{tA}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(tA)^k}{k!}\right)' = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Si on pose $p = k - 1$ *on trouve* $\left(e^{tA}\right)' = A \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p A^p}{p!} = Ae^{tA}$.

Remarque 3.1.1 *Il existent des matrices A et B tels que $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on utilise la définition de l'exponentielle, on peut montrer que $e^{A+B} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a vu dans l'exemple 17 que $e^A = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, on a $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $e^{A+B} \neq e^A e^B$.*

Lemme 3.1.2 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.*

Preuve 27 *On a $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k}{k!}$. Mais on peut montrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Alors

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}}{k!} = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{l\to+\infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lim\limits_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 18 *On a* $e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

Exemple 19 *On a*

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Soit* P *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *inversible. On a* $e^{PAP^{-1}} = Pe^{A}P^{-1}$.
2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a* $e^{\lambda I_n + A} = e^{\lambda}e^{A}$.

Preuve 28 1. *On a* $e^{PAP^{-1}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!}$. *Par récurrence, on peut montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$. *Ceci implique que*

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} &: = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = \lim_{l\to+\infty} \left[P \left(\sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} \right] \\ &= P \left[\lim_{l\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \frac{A^k}{k!} \right] P^{-1} = Pe^{A}P^{-1}. \end{aligned}$$

2. *Puisque* $(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n)$, *alors* (λI_n) *et* A *commutent donc* $e^{\lambda I_n + A} = e^{\lambda I_n}e^{A}$. *Mais*

$$\begin{aligned} e^{\lambda I_n} &= e^{\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda} I_n. \end{aligned}$$

Ainsi $e^{\lambda I_n + A} = (e^{\lambda} I_n)\, e^{A} = e^{\lambda}(I_n e^{A}) = e^{\lambda}e^{A}$.

Application 1 : Calculons l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: On a $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = 0$ implique que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont les deux valeurs propres distinctes de A. Alors, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$. Ici V_1 et V_2 sont les vecteurs propres de A associés respectivement à

λ_1 et λ_2. On a $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$. Alors, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Rappelons que si* $ad-cb \neq 0$ *alors* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ainsi, l'inverse de P est donné par $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} e^A &= e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1}+e & e^{-1}-e \\ e^{-1}-e & e^{-1}+e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Application 2 : Calculons l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: On a

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = e^{2I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = e^2 e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

D'aprés l'application ci-dessus

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}e^2 \begin{pmatrix} e^{-1}+e & e^{-1}-e \\ e^{-1}-e & e^{-1}+e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^3 & e-e^3 \\ e-e^3 & e+e^3 \end{pmatrix}.$$

Test : *Calculer l'exponentielle des matrices* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.2 *Soit* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* N *est une matrice nilpotente d'indice* $m \in \mathbb{N}^*$ *si* $N^{m-1} \neq 0_n$ *et* $N^m = 0_n$.

Exemple 20 *La matrice* $N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente d'indice* $m = 3$ *car* $N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \neq 0_3$ *et* $N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^3 = 0_3$.

Remarque 3.1.2 *Toute matrice, triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls, est nilpotente. Par exemple, la matrice* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente car c'est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont nuls .*

Théorème 3.1.3 *Soit* N *une matrice nilpotente d'indice* $m \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$e^N = I_n + \frac{N}{1!} + ... + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Preuve 29 *On a*

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + \frac{N}{1!} + ... + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

Mais N *est une matrice nilpotente d'indice* m *alors pour tout* $k \geq m : N^k = 0_n$. *En effet, on a*

$$k \geq m \Longrightarrow N^k = N^{(k-m)+m} = N^{k-m}N^m = N^{k-m}0_n = 0_n.$$

Donc, $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = 0_n$. *Si on remplace on trouve le résultat.*

Application : On a vu dans la remarque 3.1.2 que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente. *Trouvons son indice m* : On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$, alors $m = 2$ donc

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = I_n + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test : *Calculer* $e^{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3.1.2 La résolvante en terme de l'exponentielle de matrice

Considérons le système

$$Y' = A(t)\, Y. \tag{H}$$

Théorème 3.1.4 *Si*

$$\forall t, s \in I : A(t)\, A(s) = A(s)\, A(t),$$

alors

$$\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}.$$

Preuve 30 *Il suffit de montrer que la fonction* $t \longmapsto e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$ *est une solution du système*

$$\begin{cases} M' = A(t)\, M, \\ M(t_0) = I_n. \end{cases} \tag{S.R.}$$

Application : Considérons la matrice

$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix}.$$

Soient $t, s \in I = \mathbb{R}$. On a

$$A(t)\,A(s) = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st - s^2t^2 & -s^2t - st^2 \\ st^2 + s^2t & st - s^2t^2 \end{pmatrix}$$

et

$$A(s)\,A(t) = \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & -t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st - s^2t^2 & -s^2t - st^2 \\ st^2 + s^2t & st - s^2t^2 \end{pmatrix},$$

Ce qui implique que $A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t)$. C'est dire, on a montré que

$$\forall t, s \in I : A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t).$$

Ainsi

$$\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}.$$

Calculons $e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$: On a

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du} &= e^{\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} u & -u^2 \\ u^2 & u \end{pmatrix}du} = e^{\begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} udu & -\int_{t_0}^{t} u^2du \\ \int_{t_0}^{t} u^2du & \int_{t_0}^{t} udu \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \end{pmatrix}} = e^{\frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right)} e^{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose $a = \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \in \mathbb{R}$. On peut montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ A faire la suite. *Même si les valeurs propre sont complexes différentes on peut utiliser la décomposition* PDP^{-1}.

Remarque 3.1.3 *Il existent des matrices* $A(t)$ *tel que* $R(t, t_0) \neq e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du}$. *Par exemple,* *si on considère la matrice définie comme suit*

$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^t A(u)du} &= e^{\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 1 & e^u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} du} = e^{\begin{pmatrix} \int_{t_0}^t du & \int_{t_0}^t e^u du \\ \int_{t_0}^t 0du & \int_{t_0}^t 0du \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Pour $t \neq t_0$, on a $\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t-t_0 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} e^{t_0} - e^t & 1 \\ t-t_0 & 0 \end{pmatrix}$ *alors*

$$e^{\begin{pmatrix} t-t_0 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} = ...$$

Calculons $R(t, t_0)$: Si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *alors le système $Y' = A(t)Y$ avec* $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est équivalent à* $\begin{cases} y_1' = y_1 + e^t y_2, \\ y_2' = 0. \end{cases}$ *On a $y_2' = 0$ implique que $y_2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on remplace dans la deuxième équation, on trouve $y_1' = y_1 + \alpha e^t$. Cette dernière équation est sous la forme $y_1' + a(t)y_1 = b(t)$ avec $a(t) = 1$ et $b(t) = \alpha e^t$. Elle admet comme solution générale $y_1 = \beta e^t + \alpha t e^t$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ainsi, la solution générale de*

$Y' = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y$ *est*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^t + \alpha t e^t \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Trouvons $Y(t, t_0, Y_0)$: *On a* $Y(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. *Donc*

$$\begin{aligned} (Y(t_0) = Y_0) &\Longrightarrow \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = Y_0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} & e^{t_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} Y_0 \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-t_0} & -t_0 \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} Y(t, t_0, Y_0) &= \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-t_0} & -t_0 \end{pmatrix} Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0. \end{aligned}$$

Puisque

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R} : Y(t, t_0, Y_0) = R(t, t_0) Y_0,$$

alors $R(t, t_0) Y_0 = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0$, *ainsi* $R(t, t_0) = \begin{pmatrix} 2e^{t-t_0} & te^t - t_0 e^t \\ 0 & -t_0 \end{pmatrix}$.

Lemme 3.1.3 *Si pour tout* $t \in I$ *on a* $A(t) = A$ *alors* $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.

Preuve 31 *Soient* $t, s \in I = \mathbb{R}$. *On a* $A(t)A(s) = AA = A^2$ *et* $A(s)A(t) = AA = A^2$, *alors*

$$\forall t, s \in I = \mathbb{R} : A(t)A(s) = A(s)A(t).$$

Appliquons le théorème 3.1.4 pour trouver

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du} = e^{\int_{t_0}^{t} Adu} = e^{A\int_{t_0}^{t} du} = e^{(t-t_0)A}.$$

Exemple 21 *La résolvante du système* $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ *est*

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 2(t-t_0) & 0 \\ 0 & t-t_0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{pmatrix}.$$

3.1.3 Systèmes homogènes

Lemme 3.1.4 *La solution du système*

$$Y' = AY. \tag{Hcons}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{tA}C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve 32 *Puisque* $I = \mathbb{R}$ *alors* $0 \in I$. *Donc, d'aprés le chapitre 2, la solution de (Hcons) est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = R(t, 0)C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Mais, d'aprés le lemme 3.1.3, on a $R(t, 0) = e^{(t-0)A} = e^{tA}$. *En remplaçant dans (3.1) pour trouver le résultat.*

Exemple 22 *La solution du système* $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y$ *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{tA} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2,$$

avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. *C. à dire* $Y(t) = e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} C$. *Mais*

$$e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 4t & 3t \\ 0 & 4t \end{pmatrix}} = e^{4tI_2 + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

On peut facilement montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice nilpotente d'indice* $m = 2$ *alors*

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = e^{4t} \left(I_2 + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1!} \right) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} C \text{ avec } C \in \mathbb{R}^2.$$

Lemme 3.1.5 *La solution du système*

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \qquad \text{(H. D.cons)}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0.$$

Preuve 33 *Il suffit de remarquer, d'aprés le chapitre 2, que la solution de (H. D.cons)* *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = R(t, t_0) Y_0, \tag{3.2}$$

et puisque la matrice A est constante alors d'aprés le lemme 3.1.3 $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$. *En remplaçant dans (3.2), on trouve le résultat.*

Exemple 23 *La solution du système* $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$ *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} : Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $t_0 = 1$ *et* $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *C. à dire* $Y(t) = e^{(t-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais, on peut montrer que $e^{(t-1)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix}$. *Ce qui implique* $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 3(t-1)e^{4(t-1)} \\ 0 & e^{4(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Test : Résoudre le sytème $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$