المحور الثاني

مقاييس النزعة المركزية

بعدما تعرفنا على كيفية عرض البيانات الاحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية أو رسومات بيانية. سوف نتعرض في الفصل إلى نوع مهم من المقاييس الاحصائية وهو ما يسمى مقاييس النزعة المركزية.

مقاييس النزعة المركزية: وهي تلك المقاييس التي تقيس مدى تجمع البيانات حول قيمة متوسطة في مركز البيانات، أو القيم التي تتمركز حولها البيانات. ومن أهم هذه المقاييس:

أولا – المتوسط الحسابي Moyenne arithmétique

يعتبر المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما في الإحصاء (خاصة عند المقارنة بين الظواهر المختلفة)، ونرمز له بالرمز $\overline{X}$.

أ– حالة البيانات الغير مبوبة: يتم حسابه كما يلي:

إذا كانت لدينا القيم $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots\ldots x_n$، فإن متوسطها الحسابي يساوي مجموع القيم مقسوما على عددها.

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Xi}{n}$$

حيث: $\overline{X}$ = المتوسط الحسابي

X_i = تمثل قيم الظاهرة

n = تمثل عدد البيانات

مثال1: ليكن لدينا علامات مجموعة من الطلبة في مقياس الاحصاء 1.

13.6.15.11.5.7.8.16.14.12

المطلوب: حساب متوسط علامات الطلبة.

الحل: لدينا $\overline{X}=\frac{\sum x_i}{n}$

$$\overline{X}=\frac{13+6+15+\ldots\ldots+12}{10}=10{,}7$$

إذن متوسط علامات الطلبة هو 10,7

ب– حالة البيانات المبوبة:

– حالة X (متقطع):

إذا كانت لدينا القيم $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_k$

ولها تكرارات $n_1,n_2,n_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n_k$

فإن المتوسط الحسابي يحسب كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ...n_nx_n}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ...n_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum n_i}$$

أي أن المتوسط الحسابي في هذه الحالة يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها على مجموع التكرارات.

حيث: X_i = تمثل قيم المتغير الاحصائي.

n_i =تمثل التكرار المطلق المقابل لكل قيمة.

ملاحظة: 1- نسمي $\overline{X}$ في هذه الحالة بالمتوسط الحسابي المرجح لأننا نرجح كل قيمة x_i في الجدول بتكرارها المطلق n_i أو تكرارها النسبي fi.

2- لدينا $f_i = \frac{n_i}{\Sigma n_i}$ بالتعويض في الصيغة رقم 1 نجد:

$$\overline{X} = f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\ldots f_kx_k \text{ » } \overline{X} = \Sigma f_ix_i$$

مثال2: البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 50 مسكن ببلدية ما.

المطلوب: حساب متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد.

قيم المتغير x_i	n_i	n_ix_i	f_i	f_ix_i
1	1	1	0,02	0,02
2	8	16	0,16	0,32
3	13	39	0,26	0,78
4	13	52	0,26	1,04
5	6	30	0,12	0,60
6	4	24	0,08	0,48
7	3	21	0,06	0,42
8	2	16	0,04	0,32
Σ	50	199	1	3,98

الحل: لدينا $\overline{X} = \frac{\Sigma n_ix_i}{\Sigma n_i}$

$$\overline{X} = \frac{199}{50} = 3,87$$

أو

$$\overline{X} = \Sigma f_ix_i = 3,98$$

- حالة x (مستمر): يتم حسابه كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

حيث: X_i = تمثل مراكز الفئات.

n_i =تمثل التكرار المطلق المقابل لكل فئة.

ملاحظة: يمكن إيجاد $\overline{X}$ كذلك بالقانون السابق أي $\overline{X} = \sum f_i x_i$

حيث: X_i = تمثل مراكز الفئات.

f_i =تمثل التكرار النسبي المقابل لكل فئة.

مثال3: لدينا أوزان 60 طالب بالكيلوغرام في أحد الأقسام LMD بالمركز

المطلوب: حساب متوسط أوزان الطلبة.

CL	n_i	x_i	$n_i x_i$
[50 , 55 [	2	52,5	105
[55 , 60 [	5	52,5	287,5
[60 , 65 [	12	52,5	750
[65 , 70 [	16	52,5	1080
[70 , 75 [	14	52,5	1015
[75 , 80 [	8	52,5	620
[80 , 85 [	3	52,5	247,5
Σ	60	——	4105

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{4105}{60} = 68,42$$

خواص المتوسط الحسابي:

1 – يعتبر المتوسط الحسابي أبسط مقاييس المركزية حسابا وأكثرها استخداما.

2 – يأخذ المتوسط الحسابي بعين الاعتبار جميع قيم الظاهرة المدروسة.

3- لا يمكن حسابه في حالة المتغيرات الوصفية.

4- لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

5 – يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة.

6- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر = $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = 0$

ثانيا: الوسيط Mediane

وهو القيمة الموجودة في منتصف البيانات (أي القيمة التي تقسم البيانات إلى قسمين) بعد ترتيبها تصاعديا.

ونرمز له بالرمز **Me**.

1- طريقة حساب الوسيط في حالة البيانات الغير مبوبة:

مثال1:

أوجد الوسيط للبيانات التالية: 8. 6. 8. 10. 12. 15. 9

الحل: لإيجاد الوسيط نقوم بالخطوات التالية:

1- نرتب البيانات تصاعديا.

6 .8 .8 .9 .10 .12 .15

2- – إذا كان عدد البيانات فردي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

– أما إذا كان عدد البيانات زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

وفي مثالنا فإن عدد البيانات المعطاة هو 7 أي فردي وبالتالي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $RMe = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$

أي Me=9

مثال2: أوجد الوسيط للبانات التالية: 8. 6. 8. 10. 12. 15. 9.8

الحل: لإيجاد الوسيط نقوم بالخطوات التالية:

1- نرتب البيانات تصاعديا.

6 .8 .8. 8 .9 .10 .12 .15

2- بما أن n زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

$$RMe_1 = \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$RMe_2 = \frac{n}{2}+1 = \frac{8}{2}+1 = 5$$

إذن $Me=\frac{X\ 4+X\ 5}{2}=\frac{8+9}{2}=8,5$

2- طرق حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة:

أ- حساب الوسيط في حالة بيانات كمية متقطعة:

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- تكوين التكرار التجميعي الصاعد.
- حساب رتبة الوسيط $\frac{\sum n_i}{2}$
- استخراج قيمة Me

ملاحظة: - إذا كانت قيمة $\frac{\sum n_i}{2}$ غير موجودة ضمن قيم $N\nearrow$ فهناك قيمة واحدة ل Me.

- أما إذا كانت قيمة $\frac{\sum n_i}{2}$ موجودة ضمن قيم $N\nearrow$ فهناك قيمتين ل Me نحسب متوسطها.

مثال 3: أحسب الوسيط لما يلي:

حساب الوسيط:

- تكوين المتجمع الصاعد $N\nearrow$.
- **حساب رتبة الوسيط** $\frac{\sum n_i}{2}=\frac{60}{2}=30$
- بما أن رتبة الوسيط غير موجودة في قيم $N\nearrow$ فإن هناك قيمة واحدة ل Me وهي القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد أكبر من $\frac{\sum n_i}{2}$ مباشرة وهي القيمة التي تمثل الوسيط. أي $Me=3$

X_i	n_i	$N\nearrow$
1	6	6
2	15	21
3	25	46
4	10	56
5	4	60
Σ	60	—

حساب الوسيط:

- تكوين المتجمع الصاعد $N\nearrow$.
- حساب رتبة الوسيط $\frac{\sum n_i}{2}=\frac{100}{2}=50$
- بما أن رتبة الوسيط موجودة في قيم $N\nearrow$ فإن هناك قيمتين ل Me نحسب متوسطهما

$Me=\frac{3+4}{2}=3,5$

X_i	n_i	$N\nearrow$
1	10	10
2	15	25
3	25	50
4	30	80
5	20	100
Σ	100	—

ب- حساب الوسيط في حالة بيانات كمية مستمرة:

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- تكوين المتجمع الصاعد $N\nearrow$.
- حساب رتبة الوسيط $\frac{\sum n_i}{2}$
- تحديد فئة الوسيط (أو الفئة الوسيطية)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط أو أكبر منه مباشرة.
- حساب Me ونتبع العلاقة التالية:

$$Me = A + \frac{\frac{\sum n_i}{2} - N_{1-}}{n_{iMe}} . L$$

حيث: A = الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$\frac{\sum n_i}{2}$ = رتبة الوسيط.

$N\nearrow_{-1}$= التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية.

n_{iMe}= تكرار الفئة الوسيطية.

L = طول الفئة الوسيطية.

مثال 4: بالعودة للمثال السابق (الخاص بأوزان 60 طالب بالمركز)

أحسب الوسيط؟

الحل: لحساب الوسيط نتبع مايلي:

- تكوين المتجمع الصاعد $N\nearrow$.
- حساب رتبة الوسيط $\frac{\sum n_i}{2} = \frac{60}{2} = 30$
- تحديد فئة الوسيط (أو الفئة الوسيطية)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط أو أكبر منه مباشرة.

أي أن الفئة الوسيطية هي [65 , 70 [

- حساب Me ونتبع العلاقة التالية:

CL	n_i	$N\nearrow$
[50 , 55 [	2	2
[55 , 60 [	5	7
[60 , 65 [	12	19
[65 , 70 [	16	35
[70 , 75 [	14	49
[75 , 80 [	8	57
[80 , 85 [	3	60
Σ	60	——

$$Me = A + \frac{\frac{\sum n_i}{2} - N_{1-}}{n_{iMe}}.L$$

بالتعويض نجد:

$$Me = 65 + \frac{30-19}{16}.5 = 68,44$$

ملاحظة: يمكن ايجاد الوسيط بيانيا وهو نقطة تقاطع المنحنى التجميعي الصاعد والنازل نسقط عمود على المحور الأفقي(محور الفئات) ونقطة تقاطعهما تمثل قيمة الوسيط بيانيا.

خواص الوسيط:

1 – لا يتأثر بالقيم المتطرفة وبالتالي فإنه يعتبر أصلح المقاييس عن وجود مثل هذه القيم.

3 – يمكن ايجاده في حالة البيانات الوصفية الترتيبية.

4 - يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.(لأننا لا نحتاج إلى مراكز الفئات)

ثالثا: المنوال Mode

ونرمز له بالرمز **Mo**.

1- **حساب المنوال في حالة بيانات غير مبوبة:**

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا.

مثال1: قيمة المنوال للبيانات التالية **12.16.10.12.17.9** هي **Mo= 12**

مثال2: قيمة المنوال للبيانات التالية **12.16.17.10.12.17.9** هي **Mo_1= 12**، **Mo_2= 17**

مثال3: البيانات التالية **12.16.17.10.9** ليس لها منوال

2- حساب المنوال في حالة بيانات مبوبة:

أ- X متقطع:

في هذه الحالة نستنتج قيمة Me مباشرة من قيم x_i أي من جدول التوزيع التكراري مع الاشارة إلى أنه يمكننا أن نجد أكثر من منوال، كما يمكن ألا نجد ولا منوال.

مثال 4: البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 35 مسكن.

عدد الغرف x_i	عدد المساكن n_i
1	3
2	8
3	13
4	5
5	6
Σ	35

قيمة المنوال في هذا التوزيع **Mo= 3**

الشرح: أغلبية المساكن تحتوي على 3 غرف.

أ- حالة X مستمر:

إذا كان التوزيع في شكل فئات فإننا لحساب المنوال نتبع الخطوات التالية:

- تحديد الفئة المنوالية: وهي الفئة المقابلة لأكبر تكرار (عندما تكون الفئات متساوية)، والفئة المقابلة لأكبر تكرار معدل (عندما تكون الفئات غير متساوية).

- حساب المنوال Mo:

$$M_0 = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} . L$$

حيث: A = الحد الأدنى لفئة المنول.

d_1 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها.

d_2 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها.

L= طول فئة المنوال.

CL	n_i
[50 , 55 [	2
[55 , 60 [	5
[60 , 65 [	12
[65 , 70 [	16
[70 , 75 [	14
[75 , 80 [	8
[80 , 85 [	3
Σ	60

مثال 5: أحسب قيمة المنوال للمثال السابق (أوزان الطلبة).

- بما أن طول الفئات متساوية فإن فئة المنوال هي [65 , 70 [

- حساب المنوال Mo:

$$M_0 = A + \frac{d_1}{d_1 + d_2} . L$$

بالتعويض نجد: $d_1 = 16-12=4$

$d_2=16-14=2$

$L=5$ ، $A=65$

$$M_0 = 65 + \frac{4}{4+2} . 5 = 68,33$$

ملاحظة: يحدد المنوال بيانيا بواسطة المدرج التكراري، وهذا باتباع الخطوات التالية:

- نرسم المدرج التكراري.
- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة لها.
- نصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها.
- من تقاطع الخطين السابقين نسقط عمود على المحور الأفقي(محور الفئات) ونقطة تقاطعهما تمثل قيمة المنوال بيانيا.

مثال 6: حدد قيمة المنوال بيانيا للمثال السابق (أوزان الطلبة).

خواص المنوال:

- يتأثر المنوال بتغير أطوال الفئات وهو ما يقلل من أهميته.
- لإيجاد الفئات في حالة التوزيعات ذات الفئات غير متساوية لابد من تعديل التكرارات.
- يمكن إيجاده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

1- إذا كان التوزيع التكراري متماثل فإن $\overline{X}$ = Me = Mo

2- أما في حالة التوزيعات الملتوية إلتواءا بسيطا (قريبة من التماثل) فقد حدد كارل بيرسون علاقة تجريبية بين المقاييس الثلاثة وهي $(\overline{X} - Mo) = 3(\overline{X} - Me)$

وبمقتضى هذه العلاقة يمكن إستنتاج أي من المتوسطات بدلالة المقياسين الآخرين.

رابعا: أشباه الوسيط (مشتقات الوسيط)

إذا رتبت مجموعة من الأرقام تصاعديا أو تنازليا فإن القيمة التي في المنتصف والتي تقسم المجموعة الى قسمين متساويين هي الوسيط (Median)

- وبتعميم هذه الفكرة وتقسيم البيانات إلى أربع أجزاء متساوية بعد ترتيبها كذلك فإن المقياس هنا يسمى الربيع.
- وإذا تم تقسيم البيانات إلى عشر أقسام متساوية فإن المقياس يسمى العشير.
- وإذا تم تقسيمها إلى مئة قسم فإن المقياس يسمى مئين.

أ- الربيعات Quartils

1- الربيع الأول: ونرمز له بالرمز **Q_1** وهو الذي يمثل ربع البيانات أي 25% منها. ورتبة الربيع الأول هي $\frac{n}{4}$.

2- الربيع الثاني: ونرمز له بالرمز **Q_2** وهو الذي يمثل نصف البيانات أي 50% منها. ورتبة الربيع الثاني هي $\frac{n}{2}$ وهو نفسه الوسيط أي أن **$Q_2 = Me$**

3- الربيع الثالث: ونرمز له بالرمز **Q_3** وهو الذي يمثل ثلاث أرباع البيانات أي 75% منها. ورتبة الربيع الثالث هي $\frac{3n}{4}$.

مثال6: لتكن لدينا السلسلة التالية 2.4.3.5.6.8.7

-أحسب الربيع الأول والثاني والثالث؟

الحل:- الترتيب: 2.3.4.5.6.7.8

- **حساب Q_1**

$$RQ_1 = \frac{n}{4} = \frac{7}{4} = 1,75 \approx 2$$

بما أن قيمة $\frac{n}{4}$ عدد غير طبيعي (وجود فاصلة) فإن هناك قيمة واحدة لربيع الأول هي $Q_1 = X_2 = 3$

- **حساب Q_2**

$$RQ_2 = \frac{n}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \approx 4$$

بما أن قيمة $\frac{n}{2}$ عدد غير طبيعي (وجود فاصلة) فإن قيمة واحدة لربيع الثاني هي $Q_2 = X_4 = 5 = Me$

- **حساب Q_3**

$$RQ_3 \frac{3n}{4} = \frac{21}{4} = 5,25 \approx 6$$

بما أن قيمة $\frac{3n}{4}$ عدد غير طبيعي (وجود فاصلة) فإن قيمة واحدة لربيع الثالث هي **7** = $Q_3 = X_6$

ملاحظة:

1- إذا كانت قيمة $\frac{n}{4}$ عدد غير طبيعي (وجود فاصلة) فإن هناك قيمة واحدة لربيع الأول.

2- أما إذا كانت قيمة $\frac{n}{4}$ عدد طبيعي (دون فاصلة) فإن هناك قيمتين لربيع الأول نحسب متوسطهما.

وهكذا بالنسبة ل الربيع الثاني والثالث والعشريات والمئينات.

- **حالة X متقطع**: يتم إتباع نفس خطوات حساب الوسيط بتغيير في الرتبة فقط.
- **حالة X مستمر**: نفس خطوات الوسيط كذلك لكن بتغيير في الرتبة.
- فمثلا: عند حساب Q_1 تصبح الرتبة $\frac{\sum n_i}{4}$

ويحسب كما يلي:

$$Q1 = A + \frac{\frac{\sum n_i}{4} - N_{1-}}{n_{iQ1}} . L$$

- وعند حساب Q_3 تصبح الرتبة $\frac{3\sum n_i}{4}$

ويحسب كما يلي:

$$Q3 = A + \frac{\frac{3\sum n_i}{4} - N_{1-}}{n_{iQ3}} . L$$

ب- العشيريات: **Diciles**

العشير الأول: ونرمز له بالرمز D_1

ورتبة العشير الأول $\mathbf{RD_1} = \frac{\sum n_i}{10}$

ويحسب بنفس الطريقة السابقة وذلك بتغيير في الرتبة فقط

فمثلا العشير الثالث رتبته $\mathbf{RD_3} = \frac{3\sum n_i}{10}$

ويحسب في حالة X مستمر كما يلي:

$$D3 = A + \frac{\frac{3\sum n_i}{10} - N_{1-}}{n_{iD3}} . L$$

ت-المئينات: Centiles

المئين الأول: ونرمز له بالرمز C_1

ورتبة المئين الأول $\mathbf{RC_1}= \frac{\sum n_i}{100}$

ويحسب بنفس الطريقة السابقة وذلك بتغيير في الرتبة فقط

فمثلا المئين السابع رتبته $\mathbf{RC_7}=\frac{7\sum n_i}{100}$

ويحسب في حالة X مستمر كما يلي: $$C7 = A + \frac{\frac{7\sum n_i}{100} - N_{1-}}{n_{iC7}}.L$$

مثال7: أحسب الربيع الأول والعشير الثالث والمئين الستين للبيانات التالية:

C	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	Σ
n_i	4	8	10	15	6	4	3	50

خامسا: مشتقات المتوسط الحسابي

1- المتوسط الهندسي: Moyenne géométrique ونرمز له بالرمز MG

نستعمل المتوسط الهندسي في المجال الاقتصادي لحساب المعدلات (معدل الفائدة ، معدل النمو...إلخ)

ويتم حسابه كما يلي:

- **حالة البيانات الغير مبوبة:**

إذا كانت لدينا القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n$ فإن متوسطها الهندسي يساوي الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم في بعضها البعض.

$$MG = \sqrt[n]{x_1.x_2 x_3.....x_n}$$

وإذا كانت هذه القيم متكررة فإن:

$$MG = \sqrt[N]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}.....x_3^{n_4}}$$

حيث $\Sigma ni = N$ (مجموع التكرارات)

نفس الشيء إذا كانت هذه القيم مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن:

$$MG = \sqrt[N]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}.....x_3^{n_4}}$$

حيث x_i = مراكز الفئات.

$\Sigma ni = N$ (مجموع التكرارات).

أما إذا كانت البيانات كبيرة فإنه يفضل إستخدام طريقة اللوغاريتم ويكون ذلك كما يلي:

$$LogMG = \frac{1}{n}\left[\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ...+ \log x_K\right]$$

$$\mathbf{logMG} = \frac{\mathbf{1}}{n}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{logx_i}$$

حيث n عدد مفردات العينة أو المجتمع

مثال8: أوجد المتوسط الهندسي للأعداد: 2، 4، 5، 6.

الحل: $G = \sqrt[4]{2\times 4\times 5\times 6} = \sqrt[4]{240} = 3,94$

أو

$$LogMG = \frac{\mathbf{1}}{n}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{logx_i} = \frac{1}{4}\left[\log 2 + \log 4 + \log 5 + \log 6\right] = \frac{\mathbf{2.38}}{4} = 0,6$$

$$MG=10^{0,6} = 3,98$$

- **حالة البيانات المبوبة:**

X متقطع ومستمر: في هذه الحالة يحسب كما يلي:

$$LogMG = \frac{1}{\sum n_i}\left[n_1 \log x_1 + n_2 \log x_2 + n_3 \log x_3 + ... + n_n \log x_k \right]$$

$$\mathbf{logMG} = \frac{\mathbf{1}}{\sum n_i} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{n_i logx_i}$$

حيث: x_i تمثل القيمة أو مراكز الفئات.

n_i تمثل التكرار.

خواص المتوسط الهندسي:

1- لا يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

2- لا يمكن حسابه في حالة وجود قيمة سالبة أو معدومة.

3- قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي $MG < \overline{X}$

2- المتوسط التوافقي: Moyenne Harmonique ونرمز له بالرمز MH

المتوسط التوافقي نادر الاستعمال يستخدم لتحديد معدلات السرعة، ومتوسط الأسعار أي يستعمل في حالة وجود علاقة عكسية بين متغيرين (مثل السرعة بدلالة الزمن).

ويتم حسابه كما يلي:

- **حالة البيانات الغير مبوبة:**

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... \frac{1}{x_n}}$$

وبإختصار $$MH = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

حيث n عدد مفردات العينة أو المجتمع

مثال 8: إذا قطعت سيارة مسار معين بسرعة مختلفة حيث سارت في الكيلو متر الأول بسرعة 60 كلم/سا. والثاني 70 كلم /سا. أما الثالث فسارت بسرعة قدرت ب 80 كلم /سا.

أوجد متوسط السرعة المناسب لهذه السيارة خلال المسافة المقطوعة ؟.

الحل: في هذه الحالة نستعمل المتوسط التوافقي (وجود سرعة بدلالة الزمن)

$$MH = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{3}{\frac{1}{60}+\frac{1}{70}+\frac{1}{80}} = 69,12$$

- **حالة البيانات المبوبة:**

$$MH = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i}}$$

حيث: x_i تمثل القيمة أو مراكز الفئات.

n_i تمثل التكرار.

خواص المتوسط التوافقي:

1 – لا يمكن حسابه في حالة وجود بيانات معدومة.

2 – يعطي نتائج أكثر واقعية في حالة حساب متوسطات الأسعار والسرعة.

4 – قيمته دائما أقل من قيمة المتوسط الهندسي.

مما سبق فإن $MH < MG < \overline{X}$

مثال9: أوجد المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي للبيانات المبوبة في الجدول الإحصائي التالي، وماذا تلاحظ؟.

C	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	Σ
n_i	2	4	6	4	2	18

الحل:

C	n_i	X_i	$n_i\ X_i$	$n_i \log x_i$
1-3	2	2	4	2
3-5	4	4	16	4
5-7	6	6	36	6
7-9	4	8	32	8
9-11	2	10	20	10
Σ	18	—	108	13,291

المتوسط الحسابي= $\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{108}{18} = 6$

المتوسط الهندسي:

$$LogMG = \frac{1}{\sum n_i}\left[\sum n_i LogX_i\right]$$

$$= \frac{1}{18}\times 13,291$$

$$LogMG = 0,7384$$

ومنه

$$MG = 10^{0,7384} = 5,48$$

المتوسط التوافقي:

$$MH = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{X_i}} = \frac{18}{\frac{2}{2}+\frac{4}{4}+\frac{6}{6}+\frac{4}{8}+\frac{2}{10}}$$

$$MH = \frac{18}{1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \frac{180}{10+10+10+5+2} = \frac{180}{37} = 4,86$$

ونلاحظ أن: $\overline{X} > MG > MH$