Chapitre 03

Indépendance et conditionnement

Nous introduisons à présent deux notions fondamentales en théorie des probabilités. La première, le conditionnement, permet de prendre en compte une information supplémentaire dans le calcul d'une probabilité. La seconde, l'indépendance, rend compte du fait que deux évènements n'ont aucune incidence l'un sur l'autre, et donc que l'on peut évaluer la probabilité du premier indépendamment du fait que le second ait lieu ou non.

1 Probabilité conditionnelle

La notion de conditionnement nous sera très utile dans la suite puisqu'elle permet par exemple de tenir compte de l'information dont on dispose déjà pour évaluer la probabilité d'un nouvel évènement. Même en l'absence de toute chronologie sur les évènements, un détour par un conditionnement astucieux nous permettra souvent d'arriver à nos fins.

2.1.1 Définition

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité arbitraire et tous les ensembles considérés sont des évènements de la tribu $\mathcal{F}$. Nous commençons par définir la probabilité conditionnelle sachant un évènement.

Définition 1.1 (Probabilité conditionnelle). Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Pour tout évènement B, on définit la probabilité de B sachant A par :

$$\mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On définit ainsi une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, notée $\mathbb{P}(.|A)$ ou encore $\mathbb{P}_A(.)$, et appelée probabilité conditionnelle sachant A.

La vérification que $\mathbb{P}(.|A)$ est bien une probabilité, *i.e.* vérifie bien les critères de la définition 1.1.11 est laissée en exercice.

Concrètement, l'expression "probabilité de B sachant A" signifie "probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé". La probabilité de B peut être faible alors que la probabilité de B sachant A est grande (et réciproquement).

Exemple 1.2. Une urne contient 90 boules noires, 9 boules blanches et 1 boule rouge. On tire une boule au hasard : quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ? La réponse est bien sûr $\mathbb{P}(B) = 9/100$, donc une probabilité faible. On tire une boule au hasard : quelle est la probabilité qu'elle soit blanche, sachant que la boule tirée n'est pas noire ? Si on note A l'évènement "La boule tirée n'est pas noire", on a donc $\mathbb{P}(A) = 1/10$ et la réponse à la question est :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 9/10,$$

donc une grande probabilité.

On donne maintenant quelques propriétés relatives au conditionnement.

Proposition 2.1.3 (Inversement du conditionnement). *Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors on a la relation suivante :*

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A|B) \times \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer deux fois la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

□

Proposition 1.4 (Formule des probabilités composées). *Soit A_0, A_1, ..., A_n une suite d'évènements ayant une intersection commune non nulle, i.e. $\bigcap_{k=0}^{n} A_k \neq \emptyset$, on a alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1|A_0)\mathbb{P}(A_2|A_0 \cap A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_0 \cap A_1 \ldots \cap A_{n-1})$$

Démonstration. On commence par noter que tous les conditionnements sont justifiés puisque par monotonie :

$$0 < \mathbb{P}(A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \leqslant \mathbb{P}(A_0 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant (A_0 \cap A_1) \leqslant \mathbb{P}(A_0).$$

Il reste à remarquer qu'en développant les termes du produit via la définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A)$, tous se télescopent sauf le dernier. □

Remarque 2.1.5. On peut se servir de ce résultat comme d'une poupée russe : soit à calculer $\mathbb{P}(A_n)$, on introduit une suite croissante d'évènements $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n$ et la formule devient tout simplement :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1|A_0)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}).$$

Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 1.1.14, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.6 (Formule des probabilités totales). *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements qui constituent une partition de l'ensemble Ω c'est-à-dire $\Omega = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n).$$

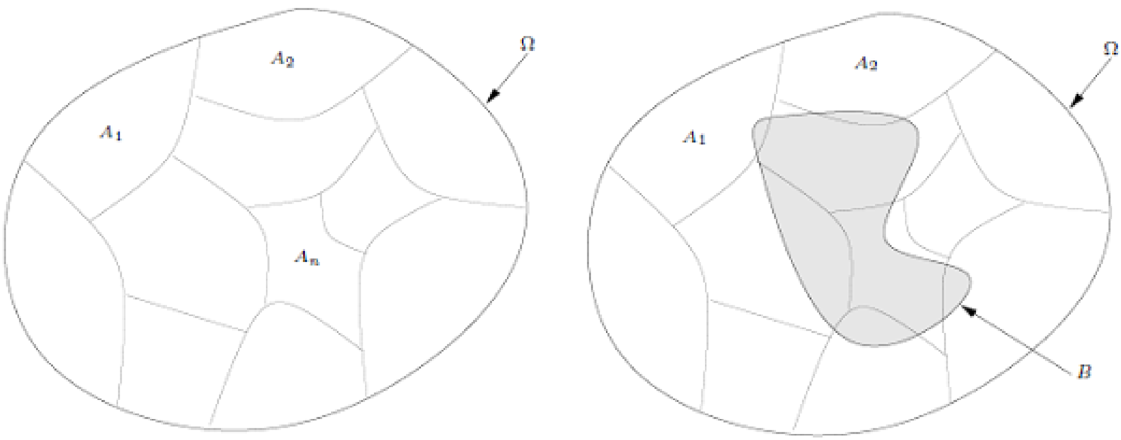

FIGURE 2.1 – Probabilité conditionnelle et partition.

Remarque 1.7. En pratique, on utilise souvent cette formule des probabilités totales en conditionnant successivement par un évènement et son contraire, c'est-à-dire en prenant tout simplement une partition de Ω du type $\Omega = A \sqcup A^c$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c).$$

Considérons l'exemple d'une urne qui contient des boules blanches et noires, marquées ou non. On suppose que parmi les boules marquées il y a 30% de boules blanche et parmi les non marquées 60%. Par ailleurs, on sait que 80% des boules sont marquées. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ? On note B pour blanche et A pour marquée, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) = \frac{30}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{36}{100}.$$

1.2 Formule Bayes

De la fomule d'inversement du conditionnement et de la formule des probabilités totales, on déduit la formule de Bayes :

Proposition 2.1.8 (Formule de Bayes). *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements qui constituent une partition de l'ensemble* Ω *c'est-à-dire* $\Omega = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. Alors pour tout* $B \in \mathcal{F}$*, on a*

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_n \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}.$$

Remarque 1.9. Lorsque la partition de Ω est du type $\Omega = A \sqcup A^c$, la formule de Bayes s'écrit simplement

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

Exemple 1.10. Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 objets. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 en produit 6%. Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ? L'évènement constaté, que l'on note A, est la présence d'une pièce défectueuse et les causes sont les machines M_1 et M_2. Compte tenu des productions de ces machines, on a $\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(M_2) = \frac{2}{3}$. De plus, les probabilités conditionnelles de l'évènement A selon les machines sont $\mathbb{P}(A|M_1) = \frac{5}{100}$ et $\mathbb{P}(A|M_2) = \frac{6}{100}$. En reportant ces valeurs dans la formule générale, on obtient

$$\mathbb{P}(M_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{100}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{100}\right)} = \frac{5}{17} \approx 0.29$$

Exemple 2.1.11. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?
On note V pour vacciné, NV pour non vacciné, M pour malade, S pour sain. D'après les hypothèses,

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(V \mid M) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(NV \mid M) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}.$$

Par définition, on a

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{\mathbb{P}(NV \cap M)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{\mathbb{P}(NV \mid M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{16}{15}\mathbb{P}(M).$$

Or

$$\mathbb{P}(M \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{1/4} = \frac{1}{12} \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(V \cap M) = 1/48.$$

$$\mathbb{P}(V \mid M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = 1/5 \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(M) = \frac{5}{48}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{16}{15} \times \frac{5}{48} = \frac{1}{9}.$$

2 La notion d'indépendance

La notion d'indépendance intervient de façon constante en probabilités. Intuitivement, deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un "n'a aucune influence" sur la réalisation ou non de l'autre. Le but de cette section est de préciser ceci mathématiquement et de l'étendre cette notion à plus de deux évènements. Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fixé.

2.2.1 Indépendance de deux évènements

Définition 2.2.1 (Indépendance de deux évènements)**.** On dit que deux évènements A et B sont indépendants, et on note $A \perp B$, si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Si A est tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit encore $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ et on retrouve la notion intuitive d'indépendance : le fait que A se soit réalisé ne change rien quant à la probabilité que B se réalise.

Exemple 2.2. Voici quelques exemples d'évènements indépendants ou non :

1. On lance un dé deux fois de suite. Soit A l'évènement : "Le premier lancer donne un nombre pair" et B l'évènement : "Le second lancer donne un nombre pair". L'univers naturel est $\Omega = \{(i,j), 1 \leqslant i,j \leqslant 6\}$, ensemble à 36 éléments muni de la probabilité uniforme. Il est clair que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 18/36 = 1/2$ et que :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 9/36 = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$
donc A et B sont indépendants.
2. On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. Soit A l'évènement : "La carte tirée est un 7" et B l'évènement : "La carte tirée est un pique". On a $\mathbb{P}(A) = 1/8$ et $\mathbb{P}(B) = 1/4$. L'évènement $A \cap B$ correspond au tirage du sept de pique $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/32$. Ainsi on a
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$
et les évènements A et B sont indépendants.
3. On joue deux fois de suite à pile ou face, $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$. On désigne par A et B les évènements "on obtient deux fois pile" et "on obtient au moins une fois pile". Alors $\mathbb{P}(A) = 1/4$, $\mathbb{P}(B) = 3/4$, et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. On a donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et les deux évènements ne sont pas indépendants.

Proposition .2.3. *Si A et B sont indépendants, alors il en va de même pour :*
- *les évènements A^c et B ;*
- *les évènements A et B^c ;*
- *les évènements A^c et B^c ;*

2.2 Indépendance de n évènements

Définition 2.4 (Indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle). Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements. On dit qu'ils sont :
- 2 à 2 indépendants si pour tout couple (i,j) d'indices distincts, A_i et A_j sont indépendants ;
- mutuellement indépendants si pour tout ensemble fini d'indices $(i_1,\ldots,i_k)$ distincts, on a
$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=\mathbb{P}(A_{i_1})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Exemple 2.2.5. Pour que 3 évènements (A,B,C) soient :
- 2 à 2 indépendants, il faut que $A\perp B$, $A\perp C$ et $B\perp C$, c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\quad \mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\quad \mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C);$$
- mutuellement indépendants, il faut que les 3 relations précédents soient vérifiées et de plus que
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Exemple 2.6. On reprend l'exemple des deux lancers successifs d'un dé et on note C l'évènement : "La somme des deux lancers est paire". On a donc $\mathbb{P}(C)=1/2$. On vérifie que les évènements (A,B,C) sont 2 à 2 indépendants, mais que :
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A\cap B)=1/4\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=1/8.$$

Remarque 2.7. En pratique, ce sera l'indépendance mutuelle qui nous intéressera et c'est aussi celle que l'on rencontrera le plus souvent. Ainsi, quand on parlera d'une famille d'évènements indépendants (sans plus de précisions), il faudra désormais comprendre mutuellement indépendants.