Table des matières

Chapitre 1

Fonctions réelles d'une variable réelle

1.1 *Généralités*

1.1.1 *Fonctions réelles d'une variable réelle*

Définition 1.1.1 *:*

On appelle fonction réelle (numérique) d'une variable réelle tout application:

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

tel que E *est une partie de* $\mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$.

Remarque 1.1.1 *: Dans le cas* $E = \mathbb{N}$, *la fonction* f *définit une suite numérique.*

Exemple 1.1.1 *:*

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

f *est la fonction affine.*

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sin x$

f est la fonction sinus.

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x \longmapsto f(x) = E(x)$

f est la fonction partie entière de x.

1.1.2 *Domaine de définition*

Définition 1.1.2 *:*

*Soit la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réelles x se qu'ont une image par f (**i.e**: $f(x)$ existe et $f(x) \in \mathbb{R}$). On note par D_f ou $Def(f)$.*

1.1.3 *Graphe d'une fonction*

Définition 1.1.3 *:*

Le graphe $G(f)$ d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini par:

$$G(f) = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in E \right\}$$

Remarque 1.1.2 *:*

Si A est un sous-ensemble de E $(A \subset E)$ alors on appelle restriction de f sur A, qu'on note f_A la fonction définie par:

$$\begin{aligned} f_A : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_A(x) = f(x) \end{aligned}$$

1.1.4 *Fonction paire et impaire*

Définition 1.1.4 *:*

Soit f une fonction $(f : E \longrightarrow \mathbb{R})$. On suppose que $\forall x \in E, (-x) \in E$.

1. *On dit que f est une fonction **paire** si:* $\forall x \in E : f(x) = f(-x)$.

   Le graphe de la fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (oy).

2. *On dit que f est une fonction **impaire** si:* $\forall x \in E : f(-x) = -f(x)$.

   Le graphe de la fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine $o(0,0)$.

Exemple 1.1.2 *:*

1) *Les fonctions* $x \longrightarrow x^2$ *et* $x \longrightarrow \cos x$ *sont paires.*

2) *Les fonctions* $x \longrightarrow x^3$ *et* $x \longrightarrow \sin x$ *sont impaires.*

1.1.5 *Fonction périodique*

Définition 1.1.5 *:*

Soit f une fonction $(f : E \longrightarrow \mathbb{R})$.

*On dit que la fonction f est **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que:*

$$\forall x \in E, x + T \in E : f(x+T) = f(x)$$

donc f est dite périodique et période T.

- *Si T est une période de f alors tout nombre de la forme kT $(k \in \mathbb{N}^*)$ est aussi une période de f.*

Exemple 1.1.3 *:*

1) *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont périodiques de période $T = 2\pi$.*

2) *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$

est périodique de période T. Alors la fonction g définie par:

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(ax+b)\,; \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R} \end{array}$$

est périodique de période $\dfrac{T}{a}$.

On a: $f(x+T)=f(x)$ *et montré que* $g\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=g(x)$.

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=f(ax++b)=g(x).$$

Application: $g(x)=\cos(5x+2),\quad a=5,\ \ b=2,\ \ f(x)=\cos x.$

$\cos$ *est périodique de période* 2π *alors* $\cos(5x+2)$ *est aussi périodique de période* $\dfrac{2\pi}{5}$.

1.1.6 *Fonction bornée*

Définition 1.1.6 *:*

Soit $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction. Rappelons que* $f(E)=\{f(x);\quad x\in E\}\subseteq\mathbb{R}$.

1. *On dit que* f *est majorée si l'ensemble* $f(E)$ *est majorée.*

   i.e: $(f$ *majoré*$)\Longleftrightarrow(\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in E:f(x)\leq M)$.

2. *On dit que* f *est minoré si l'ensemble* $f(E)$ *est minoré.*

   i.e: $(f$ *minorée*$)\Longleftrightarrow(\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in E:f(x)\geq m)$.

3. f *est bornée si l'ensemble* $f(E)$ *est bornée.*

   i.e: $(f$ *bornée*$)\Longleftrightarrow(\exists m,M\in\mathbb{R},\forall x\in E:m\leq f(x)\leq M)$.

Remarque 1.1.3 *:*

1) *Si* f *est une fonction bornée. Alors l'ensemble* $f(E)$ *est bornée dans* $\mathbb{R}$ *donc* $f(E)$ *admet une borne supérieure et borne inférieure.*

Dans ce cas on pose: $\sup\limits_{x\in E}f(x)=\sup f(E)$ *et* $\inf\limits_{x\in E}f(x)=\inf f(E)$.

Les valeurs $\sup f(x)$ *et* $\inf f(x)$ *s'appellent respectivement bornes supérieures et bornes inférieures de la fonction* f *sur l'ensemble* E *et se notent* $\sup f$ *et* $\inf f$ *et on a:*

$$M=\sup f\Longleftrightarrow\begin{cases}\forall x\in E,\quad f(x)\leq M\\ \forall\varepsilon>0,\exists x_0\in E,\quad f(x_0)>M-\varepsilon\end{cases}$$

et

$$m = \inf f \iff \begin{cases} \forall x \in E, \quad f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \quad f(x_0) < m + \varepsilon \end{cases}$$

2) $\sup f(x)$ *et* $\inf f(x)$ *n'appartient pas forcément à* $f(E)$.

Dans le cas $\sup f(x)$ *et* $\inf f(x)$ *appartient à* $f(E)$ *on dit que la fonction* f *atteint ses bornes sur* E.

i.e: (f *atteint ses bornes sur* E) $\iff \begin{cases} \exists x_1 \in E, \ \sup\limits_E f = f(x_1) \\ \exists x_2 \in E, \ \inf\limits_E f = f(x_2) \end{cases}$

Exemple 1.1.4 *:*

$$\begin{array}{rcl} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

On a f *est bornée:* $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \sup f(x) &= \sup f(E) &= 1 \\ \inf f(x) &= \inf f(E) &= -1 \end{aligned}$$

on a atteint ses bornées car il existe:

$$\exists x_1 = 0 \in E, \ f(x_1) = f(0) = \cos 0 = 1 = \sup_E f$$
$$\exists x_2 = \pi \in E, \ f(x_2) = f(\pi) = \cos \pi = -1 = \inf_E f$$

1.1.7 *Fonction monotone:*

Définition 1.1.7 *:*

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

1. *On dit que* f *est* ***croissante*** *(resp strictement croissante) si:*

$$\forall x, y \in E; \ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\textit{resp } f(x) < f(y))$$

2. *On dit que* f *est* ***décroissante*** *(resp strictement décroissante) si:*

$$\forall x, y \in E; \ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\textit{resp } f(x) > f(y))$$

3. *On dit que f est* ***monotone*** *sue E, si elle est croissante ou elle est décroissante sur E.*

Corollaire 1.1.1 *:*

Si f est strictement monotone sur E, alors f est ***injective.***

En effet: $\begin{pmatrix} x \neq y \\ x < y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f(x) < f(y) \\ ou \\ f(x) > f(y) \end{pmatrix} \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemple 1.1.5 *:* $f(x) = 2x + 1$

on a: $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $x < y \Longrightarrow 2x < 2y \Longrightarrow 2x + 1 < 2y + 1 \Longrightarrow f(x) < f(y)$.

donc f est strictement croissante alors f est injective.

1.1.8 *La fonction valeur absolue:*

Définition 1.1.8 *:*

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On définit la fonction valeur absolue de la fonction f qu'on note $|f|$, par:

$$\begin{array}{rcl} |f| : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f|(x) = |f(x)| \end{array}$$

Proposition 1.1.1 *:*

La fonction valeur absolue $|.|$ vérifie: $\forall f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ on a:

1) $|f| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

2) $|f \times g| = |f| \times |g|$.

3) $|f + g| \leq |f| + |g|$.

1.2 *Limite d'une fonction:*

1.2.1 *Voisinage d'un point* x_0

Définition 1.2.1 *: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$; $\delta > 0$.*

1.2.2 *Fonction définie au voisinage d'un point* x_0

S*oit* f *une fonction* $(f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$ *et soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *est défini au voisinage de* x_0 *si:* $\exists \delta > 0, \ \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq E$.

1.2.3 *Limite d'une fonction*

Soit f *une fonction définie au voisinage d'un point* x_0 sauf peut être en x_0.

On dit que f *admet une limite* l *au point* x_0 *si:*

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Exemple 1.2.1 *:* $f(x) = 5x - 3$

Montre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \neq 1, |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$

on a:

$\forall \varepsilon > 0 : |5x - 3 - 2| < \varepsilon \Longrightarrow |5x - 5| < \varepsilon \Longrightarrow 5|x - 1| < \varepsilon \Longrightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

donc $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{5} > 0, \ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

Remarque 1.2.1 *:*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0; \exists x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \ et \ |f(x) - l| \geq \varepsilon.$

1.2.4 *Unicité de la limite*

Théorème 1.2.1 *:*

Si f *admet une limite au point* x_0 *alors cette limite est unique.*

Preuve. *: On suppose que* f *admet deux limites différentes au point* x_0, l *et* l' $(l \neq l')$.

On a:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0; \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l' \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ *et* $\varepsilon < |l - l'|$

$$Alors \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \quad et \\ |f(x) - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On a:

$$
\begin{aligned}
|l-l'| &= |l-l'+f(x)-f(x)| \\
&\leq |f(x)-l|+|f(x)-l'| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ d'où la contradiction avec } |l-l'|>\varepsilon
\end{aligned}
$$

alors $l=l'$. ■

1.2.5 *Limite à droite et limite à gauche*

1. On dit que f a une limite à droite au point x_0 et on écrit: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l$ si: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x;\ \ x_0<x<x_0+\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

2. On dit que f a une limite à gauche au point x_0 et on écrit: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$ si: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x;\ \ x_0-\delta<x<x_0 \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

Remarque 1.2.2 *:*

Si la limite de f *existe au point* x_0 *alors les limite à droite et à gauche existe aussi et on a:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$.

Conclusion 1.2.1 *:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x).$$

1. **Remarque 1.2.3** *:*

   Si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ *alors* f *n'admet pas une limite au point* x_0.

1.2.6 *Cas où* x *est infini*

On a:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A>0, \forall x\in\mathbb{R},\ x>A \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A>0, \forall x\in\mathbb{R},\ x<-A \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

1.2.7 *Limites infinies*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ *on posera par définition:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A.$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Longrightarrow f(x) > A.$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < -B \Longrightarrow f(x) > A.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Longrightarrow f(x) < -A.$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < -B \Longrightarrow f(x) < -A.$

1.2.8 *Relation avec les limites de suites*

Théorème 1.2.2 *:*

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *alors on a:*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall$ *une suite* (x_n) *de* E*,* $x_n \neq x_0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

1.2.9 *Operations sur les limites*

Théorème 1.2.3 *:*

Soit f *et* $g : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ *alors*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'.$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = l \times l'.$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l.$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|.$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}, \quad l' \neq 0.$

6) *notons aussi* $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow l \leq l'.$

1.2.10 *Formes indéterminées*

Lorsque les limites ne sont pas finies, les résultats précédents restent vrais à chaque fois que les opérations sur les limites ont un sens.

Dans le cas, où on ne peut pas calcule, on dit qu'on se trouve en présence d'une forme indéterminée. Si $x \longrightarrow x_0$

1) $f(x) \longrightarrow +\infty$ *et* $g(x) \longrightarrow -\infty$ *alors* $f+g$ *se présente sous la forme indéterminée* $+\infty - \infty$.

2) $f(x) \longrightarrow 0$ *et* $g(x) \longrightarrow 0$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *se présente sous la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$.

3) $f(x) \longrightarrow \infty$ *et* $g(x) \longrightarrow \infty$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *se présente sous la forme indéterminée* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

4) $f(x) \longrightarrow \infty$ *et* $g(x) \longrightarrow 0$ *alors* $f \times g$ *se présente sous la forme indéterminée* $0 \times \infty$.

- *Il ya d'autres cas de formes indéterminées de type:* $1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$ $\left(\lim (f(x))^{g(x)}\right)$. *Ces formes se la ramènent à la forme* $0 \times \infty$ *par passage au logarithme.*

  $$y = (f(x))^{g(x)} \Longrightarrow \ln y = g(x) \ln f(x).$$

1.2.11 *Proposition (principe des gendarmes)*

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \, (l \in \mathbb{R})$.

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* x_0 *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.

1.3 *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point*

On est souvent amené à étudier le comportement d'une fonction par rapport à une autre au voisinage d'un point, on utilisera pour la certaines notation.

1.3.1 *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point*

Définition 1.3.1 *:*

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0.

1. *On dit que f est* ***négligeable*** *devant g lorsque $x \longrightarrow x_0$ (ou en x_0) et l'on écrit $f = o(g)$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

2. *On dit que f est* ***dominé*** *par g lorsque $x \longrightarrow x_0$ (ou en x_0) et l'on écrit $f = O(g)$ si:*

$$\exists k > 0, \forall \delta > 0, \forall x; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|.$$

- *Les symboles o et O s'appellent notations de* ***Landau.***

Remarque 1.3.1 *:*

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 alors:

$f = o(g) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

$f = O(g) \Longleftrightarrow \left|\dfrac{f}{g}\right|$ *est bornée dans un voisinage de x_0.*

Cas particulier: *Si $g = 1$ alors:*

$f = o(g) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0.$

$f = O(g) \Longleftrightarrow f$ *est bornée dans un voisinage de x_0.*

3. *Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ on posera par définition:*

$$(f = o(g) \text{ lorsque } x \longrightarrow +\infty) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x; x > A \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

$$(f = O(g) \text{ lorsque } x \longrightarrow +\infty) \Longleftrightarrow \exists k > 0, \forall A > 0, \forall x; x > A \Longrightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|.$$

De façon analogue; on définit, les relations $f = o(g)$ et $f = O(g)$ pour $x \longrightarrow -\infty$.

1.3.2 *Fonctions équivalentes*

Définition 1.3.2 *:*

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

On dit que f est ***équivalente*** *à g lorsque $x \longrightarrow x_0$ et l'on écrit $f \sim g$ si $f - g = o(f)$ lorsque $x \longrightarrow x_0$.*

- *Remarque que* $f - g = o(f) \Longleftrightarrow f - g = o(g)$

Remarque 1.3.2 *:*

La relation $(\sim)$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Exemple 1.3.1 *:*

$x \underset{V(0)}{\sim} x,$

$\cos x \underset{V(0)}{\sim} 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$\tan x \underset{V(0)}{\sim} x.$

Remarque 1.3.3 *:*

S'il existe un voisinage V de x_0 tel que f et g ne s'annulent pas dans $V(x_0)$ alors:

$f \underset{V(x_0)}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Exemple 1.3.2 *:*

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad car \sin x \underset{V(0)}{\sim} x.$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad car \quad \ln(1+x) \underset{V(0)}{\sim} x.$

Théorème 1.3.1 *:*

1. *Soient f et f_1 deux fonctions définies au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.*

   On suppose que $f \sim f_1$ en x_0 alors:

   Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ existe aussi et on a: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$.

2. *Soient f, f_1, g, g_1 des fonctions définies au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.*

On suppose que $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ en x_0

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ existe aussi et les deux limites sont égales.

Exemple 1.3.3 :

$\sin x \underset{V(0)}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{V(0)}{\sim} x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1.$