3-2- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين

قبل تحديد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين، يجب أن نفرق بين العينتين المستقلتين والعينتين المرتبطتين.

3-2-1- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين.

نظرية (1-11): إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان مستقلان بحيث $\mathrm{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $\mathrm{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{\mathrm{X}}_2)$ بحجم n_1 و n_2 مسحوبتين من هذين المجتمعين هو توزيع طبيعي بحيث:

- $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
- $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

ويجب أيضا أن نفرق بين 03 حالات:

❖ σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:

يكون توزيع الفرق بين متوسطي عينتين هو:

$$(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{\mathrm{X}}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{\mathrm{X}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال (1- 16):

من مجتمعين طبيعيين مستقلين بحيث $_1 \sim N(40, 25)$ و $_2 \sim N(38, 16)$ تم سحب عينتين من هذين المجتمعين بحجم 100 و 64 على التوالي. والمطلوب: أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{\mathrm{X}}_2)$، ثم أحسب $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 3)$.

الحل:

حيث أن تبايني المجتمعين الطبيعيين معلومين، يكون توزيع الفرق بين متوسطي عينتين هو:

$$(\bar{\mathrm{X}}_1 - \bar{\mathrm{X}}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

بالتعويض:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(40 - 38, \frac{25}{100} + \frac{16}{64}\right) = N(2, \frac{1}{2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$$

أما قيمة الاحتمال المطلوب فهي:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) = P(Z \leq 1.41) = \emptyset(1.41) = 0.920730$$

- **σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و $_2$ كبيرين:**

في هذه الحالة نستبدل σ_1^2 و σ_2^2 بـ تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 ، وتوزيع الفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال (1- 17):

إذا كان $_1 \sim N(20, \sigma_1^2)$ و $_2 \sim N(16, \sigma_2^2)$ وتم سحب عينتين من هذين المجتمعين بحجم **100** و **80** على التوالي، وكان تباين العينتين هو على التوالي $^2_1 = 49$ و $S_2^2 = 36$. المطلوب: أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$، ثم أحسب $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 2)$.

الحل:

تبايني المجتمعين الطبيعيين مجهولين، غير أن حجم العينتين كبير وبالتالي يكون توزيع الفرق بين متوسطي عينتين هو :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$$

بالتعويض:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\sim N\left(20-16,\frac{49}{100}+\frac{36}{80}\right)=N(4,0.94)$$

وبالتالي:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-4}{\sqrt{0.94}}\sim N(0,1)$$

أما قيمة الاحتمال المطلوب فهي:

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2\leq 2)=P\left(Z\leq\frac{2-4}{\sqrt{0.94}}\right)=P(Z\leq -2.05)=\emptyset(-2.05)=0.020182$$

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و n_2 صغيرين أو أحدهما صغير:**

في هذه الحالة توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $(\vartheta=n_1+n_2-2)$، أي:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\sim t(n_1+n_2-2)$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

مثال (1- 18):

تم سحب عينة عشوائية حجمها **22** وتباينها يساوي **9** من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوي **40** وتم سحب عينة أخرى حجمها **30** وتباينها يساوي **16** من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوي **50**. والمطلوب أحسب $P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>12)$.

الحل:

لدينا $\mu_1=50$ $\quad S_1^2=9$ $\quad n_1=22$

$\mu_2=40$ $\quad S_2^2=16$ $\quad n_2=30$

وحيث أنّ $n_1=22<30$ وتباين المجتمعين مجهول، إذن توزيع الفرق بين متوسطي العينتين هو:

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\sim t(50)$$

ومنه فإن:

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2})}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-10}{\sqrt{(\frac{9}{22}+\frac{16}{30})}}\sim t(50)$$

أما الاحتمال المطلوب فيكون:

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>12)=P\left(t>\frac{12-10}{\sqrt{\left(\frac{9}{22}+\frac{16}{30}\right)}}\right)=P(t>2.06)=0.025$$

- **حالة خاصة: عندما يكون $^2_1=\sigma_2^2=\sigma^2$**

عندما يكون حجما العينتين صغيرا أو أحدهما صغير مع العلم أنّ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ فإننا نقدر ^{2} بـ S_p^2 حيث S_p^2 تحسب من العلاقة:

$$S_P^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

ملاحظة:

يقصد بتساوي تبايني المجتمعين $^2_1$ و σ_2^2 بأنهما متجانسان وفقا لدراسات سابقة أجريت.

مثال (1- 19):

إذا كان $X_1\sim N(11,\sigma_1^2)$ و $_2\sim N(15,\sigma_2^2)$ وتم سحب عينتين عشوائيتين من هذين المجتمعين، علما أن حجم العينة الأولى يساوي 16 بتباين يساوي 12 وحجم العينة الثانية يساوي 10 بتباين يساوي 25. وبافتراض تجانس تبايني المجتمعين، أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$، ثم أحسب $P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>8)$.

الحل:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم كل عينة أقل من **30** مشاهدة فإن توزيع الفرق بين متوسطي العينتين هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

بالتعويض:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim t(20)$$

وبتقدير تباين المجتمعين ^{2} بـ S_P^2 يكون:

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(11)(16) + (9)(25)}{20} = 20.05$$

وبالتالي:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 4}{\sqrt{20,05(\frac{1}{12} + \frac{1}{10})}} \sim t(20)$$

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 8) = P\left(t > \frac{8 - 4}{\sqrt{20.05(\frac{1}{12} + \frac{1}{10})}}\right) = P(t > 2.08) = 0.025$$

3-2-2- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مرتبطتين.

قد نلجأ في بعض الأحيان إلى سحب عينتين مرتبطتين، ويتوقف الأمر هنا على نوعية المسألة أو الظاهرة المدروسة. فمثلا لقياس فعالية منتوج جديد من الأدوية على عينة من المرضى يتم قياس مستوى الحالة الصحية للمرضى قبل تناول الدواء وبعد تناوله فتكون القراءات قبل وبعد تناول الدواء تشكل عينتين مرتبطتين.

ولإيجاد توزيع للفرق بين متوسطي المجتمعين الذين سحبت منهما العينتين في هذه الحالة، يتم إيجاد توزيع لمتوسط واحد لهما. وفيما يلي توضيح للعملية كيف تتم.

إذا كان $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وكان المجتمعان مرتبطان وسحبت من كل مجتمع عينة حجمها n $\{X_1, X_2, \dots\dots, X_n\}$ و $\{Y_1, Y_2, \dots\dots, Y_n\}$ على الترتيب، بحيث تمثل X_i و Y_i القيمتين المتناظرتين في العينتين، إذا كانت الفروق بين قيم العينتين المتناظرة هي $\{D_1, D_2 \dots\dots, D_n\}$ حيث $D_i = X_i - Y_i$ لجميع قيم $i = 1, 2, \dots, n$، فإن $\{D_1, D_2 \dots\dots, D_n\}$ تشكل عينة الفروق ويمكن النظر لهذه العينة التي حجمها n على أنها عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه σ_D^2 ، ولنفرض أن متوسط العينة μ_d و تباينها S_d^2.

ويجب أن نميز بين التوزيع في حالة العينات الكبيرة والعينات الصغيرة:

- **العينات الكبيرة** $(n \geq)$:

يكون توزيع الوسط الحسابي هو:

$$\bar{\mathbf{D}} \sim N(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{\sigma_D^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

وفي حالة ما إذا كان تباين المجتمعين مجهول يستبدل بتباين العينتين.

- **العينات الصغيرة** $(n < 30)$:

يكون توزيع الوسط الحسابي هو:

$$\bar{\mathbf{D}} \sim t(n-1)$$

وبالتالي:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \sim t(n-1)$$

مثال (1- 20):

أردنا أن نجري اختبارا لتطبيق حمية غذائية معينة على عينة مكونة من **10** أشخاص، حيث أن أوزان هؤلاء الأشخاص قبل الحمية وبعدها تمثل العينتين المفروضتين. والمطلوب أوجد توزيع المتوسط الحسابي للعينة ثم أحسب احتمال أن يكون الفرق قبل أخذ الحمية وبعدها لا يقل عن **7**.

قبل أخذ الحمية i	85	90	84	84	78	63	67	72	57	82
بعد أخذ الحمية i	82	80	78	84	77	63	63	68	56	81

الحل:

نحسب أولا الفروق ما بين قبل أخذ الحمية الغذائية وبعد أخذ الحمية الغذائية كمايلي:

قبل أخذ الحمية i	85	90	84	84	78	63	67	72	57	82
بعد أخذ الحمية i	82	80	78	84	77	63	63	68	56	81
الفروق D_i	3	10	6	0	1	0	4	4	1	1

نحسب الآن:

$$\mu_D = \frac{\sum D_i}{n} = 3$$

$$S_D^2 = \frac{\sum (D_i - \mu_D)^2}{n-1} = 10$$

وبذلك نحصل على:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} = \frac{\bar{D} - 3}{\sqrt{\frac{10}{10}}} \sim t(9)$$

ويكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(\bar{D} > 7) = P\left(T > \frac{7-3}{\sqrt{1}}\right) = P(T > 4) = 0.001$$

3-3- توزيع المعاينة للنسبة في العينة

عندما يمكن لكل مشاهدة في المجتمع أن تحمل خاصية من الخاصيتين 0 أو 1، نعم أو لا، فشل أو نجاح، مدخن أو غير مدخن، أمي أو غير أمي...الخ. فإننا نسمي كل مشاهدة من هذا المجتمع بتجربة برنولي. وعندما نأخذ عينة عشوائية من هذا المجتمع فإن المعاينة في هذه الحالة تكون من مجتمع ذي الحدين (تجربة برنولي مكررة عدة مرات).

وينصب اهتمامنا في هذه الحالة على النسبة في العينة.

فحساب النسبة في المجتمع والتي يرمز لها بـ P يتم بقسمة مجموع مفردات الخاصية المدروسة X (عدد المدخنين في المجتمع مثلا) على حجم المجتمع N كما يلي $\left(P = \frac{X}{N}\right)$. أما حساب النسبة في العينة لخاصية ما (عدد المدخنين في العينة مثلا) والتي يرمز لها بـ $\hat{P}$ فيتم بقسمة مجموع مفردات الخاصية المدروسة على حجم العينة كما يلي $\hat{P} = \frac{x}{n}$.

لو أخذنا جميع العينات التي حجمها n مجتمع حجمه N لوجدنا أن النسب لهذه العينات قد تختلف من عينة لأخرى، مما يعني أن سلوك هذه النسب هو سلوك متغير عشوائي وبالتالي هذا المتغير له توزيع احتمالي مستمدا من توزيع المجتمع الذي سحبت منه هذه العينات. هذا المتغير العشوائي الذي له توزيع احتمالي مستمدا من توزيع المجتمع الذي سحبت منه هذه العينات يسمى بتوزيع النسبة في العينة.

عندما يكون حجم العينة كبيرا ($n \geq$) فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة سيكون تقريبا طبيعيا (نظرية النهاية المركزية)

بمتوسط يساوي إلى:

- $\mu_{\hat{P}} = P$

وتباين يساوي إلى:

- $\sigma^2_{\hat{P}} = \frac{P(1-P)}{n}$

وبذلك يكون توزيع النسبة في العينة هو:

$$\hat{P} \sim N(P, \frac{P(1-P)}{n})$$

وللإجابة على السؤال الاحتمالي المتعلق بالنسبة P نستخدم الصيغة التالية:

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim N(0,1)$$

ملاحظات:

- حتى نتمكن من استخدام التقريب الطبيعي بشكل صحيح، يجب أن يكون كل من nP و $n(1-P)$ أكبر من 5. وهذا حتى نتأكد من أنّ حجم العينة n كبير بما فيه الكفاية.
- في حالة السحب بدون إرجاع نضرب تباين العينة في معامل التصحيح.
- في حالة مجهولية P نستبدلها بـ $\hat{P}$.

مثال (1- 21):

مجتمع مكون من 1000 شخص من بينهم 600 شخص مدخن، إذا سحبنا عينة من 36 شخص. المطلوب، أوجد توزيع نسبة المدخنين في العينة ثم أحسب احتمال أن تكون نسبة المدخنين في العينة أقل من 55%.

الحل:

$X = 600$ $\qquad N = 1000$ $\qquad n = 36$

من معطيات هذا التمرين يتبين لنا أن نسبة المدخنين في المجتمع تساوي إلى: $P = \frac{600}{1000} = 0.6$ وبالتالي يكون:

- $\mu_{\hat{P}} = P = \frac{X}{N} = 0.6$
- $\sigma^2_{\hat{P}} = \frac{P(1-P)}{n} = \frac{(0.6)(0.4)}{36} = 0,0006$

وبذلك يكون توزيع النسبة في العينة هو:

$$\hat{P} \sim N(0.6\,, 0.0006)$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{P(1-P)/_{n}}} = \frac{\hat{P} - 0.6}{\sqrt{0.0006}} \sim N(0,1)$$

أما قيمة الاحتمال المطلوب فهي:

$$P(\hat{P} < 0.55) = P\left(Z < \frac{0.55 - 0.6}{\sqrt{0.0006}}\right) = P(Z < -2.04) = \emptyset(-2.04) = 0.020675$$

3- 4- توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين

إذا سحبنا عينة كبيرة n_1 من مجتمع يخضع لتوزيع برنولي (ذي الحدين $(X_1 \sim b(1, P_1)$ وسحبنا عينة كبيرة أخرى n_2 من مجتمع آخر مستقل عن المجتمع الأول ويخضع لتوزيع برنولي (ذي الحدين $(X_2 \sim b(1, P_2)$ فإن الفرق بين النسبتين في العينيتن $(\widehat{P_1} - \widehat{P_2})$ هو متغير عشوائي يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \mu_{\hat{P}_1} - \mu_{\hat{P}_2} = P_1 - P_2$$

وتباين

$$\sigma^2{}_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sigma^2{}_{\hat{P}_1} + \sigma^2{}_{\hat{P}_2} = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

ويكون توزيع الفرق بين نسبتي العينتين هو:

$$(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) \sim N\left(P_1 - P_2, \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$Z = \frac{(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) - P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال (1- 22):

إذا علمت أن نسبة المصابين بداء السكري في مدينة A هو 7% وفي المدينة B هو 5%، فإذا سحبنا عينة عشوائية من المدينة A حجمها 40 وعينة عشوائية أخرى من المدينة B حجمها 35 فأوجد توزيع الفرق بين نسبتي العينتين ثم أحسب احتمال أن يكون الفرق بين النسبتين في العينتين أقل من 0.01%.

الحل:

$$P_A = 0.07 \qquad P_B = 0.05 \qquad n_A = 40 \qquad n_B = 35$$

يكون توزيع الفرق بين نسبتي العينتين كما يلي:

- $\mu_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = \mu_{\widehat{P}_1} - \mu_{\widehat{P}_2} = P_1 - P_2 = 0.07 - 0.05 = 0.02$
- $\sigma^2_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2} = \sigma^2_{\widehat{P}_1} + \sigma^2_{\widehat{P}_2} = \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2} = \frac{0.07(0.93)}{40} + \frac{0.05(0.95)}{35} = 0.0098$

$$(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) \sim N(0.02, 0.0098)$$

ومنه:

$$Z = \frac{(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) - 0.02}{\sqrt{0.0098}} \sim N(0,1)$$

أما قيمة الاحتمال المطلوب فهي:

$$P(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 < 0.01) = P\left(Z < \frac{0.01 - 0.02}{\sqrt{0.0098}}\right) = P(Z < -0.10) = \emptyset(-0.10) = 0.424655$$

3-5- توزيع المعاينة للتباين

نحتاج في كثير من الأحيان في العمل الإحصائي إلى معرفة توزيع تباين العينة. وسنقدم هذا التوزيع في حالة المعاينة من توزيع طبيعي.

فإذا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع موزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ وتباينه σ^2 أي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكان S^2 هو تباين العينة فإن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $n-1$ أي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$.

مثال (1- 23):

إذا سحبنا عينة حجمها **25** من مجتمع طبيعي حجمه **100**، ما هو احتمال أن يكون تباين العينة ^{2} أكبر أو يساوي **20** علما أنّ تباين المجتمع يساوي **36**.

الحل:

$$\boldsymbol{n = 25} \qquad \boldsymbol{N = 100} \qquad \boldsymbol{\sigma^2 = 36}$$

يكون توزيع تباين العينة هو:

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{(n-1)S^2}}{\boldsymbol{\sigma^2}} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(n-1)}}$$

بالتعويض:

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{24S^2}}{\mathbf{36}} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(24)}}$$

أما قيمة الاحتمال المطلوب فهي:

$$\boldsymbol{P(S^2 \geq 20)} = P\left(\frac{24S^2}{36} \geq \frac{24*20}{36}\right) = P(\chi^2 \geq 13.33) = 0.95$$

3- 6- توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين

للمقارنة بين تبايني مجتمعين فإننا نحتاج النسبة بين تبايني عينتين مأخوذتين من هذين المجتمعين، ونلجأ لحساب النسب بين التباينات وليس الفرق بينها لسهولة دراسة النسب وتفسيرها. وسنعطي توزيع هذه النسبة في حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين مستقلين.

فإذا سحبنا عينة حجمها $_{1}$ من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا $\boldsymbol{N(\mu_1, \sigma_1^2)}$ وكان تباينها $\boldsymbol{S_1^2}$، وسحبنا عينة أخرى حجمها $\boldsymbol{n_2}$ من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا مستقل عن الأول $\boldsymbol{N(\mu_2, \sigma_2^2)}$ وكان تباينها $\boldsymbol{S_2^2}$ فإن:

$$\frac{\mathbf{(n_1-1)}\boldsymbol{S_1^2}}{\boldsymbol{\sigma_1^2}} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(n_1-1)}} \qquad , \qquad \frac{\mathbf{(n_2-1)}\boldsymbol{S_2^2}}{\boldsymbol{\sigma_2^2}} \sim \boldsymbol{\chi^2_{(n_2-1)}}$$

وبحسب توزيع فيشر ومن أجل مجتمعين مستقلين تكون الإحصاءة:

$$f = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1 - 1)}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2 - 1)} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

ومنه:

$$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

مثال (1- 24):

سحبت عينة عشوائية حجمها **21** من مجتمع طبيعي تباينه يساوي **36**، وسحبت عينة أخرى حجمها **25** تباينه يساوي **25** مستقل عن المجتمع الأول. والمطلوب أوجد احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أكبر من **3.95**.

الحل:

$n_1 = 21$ $\quad \sigma_1^2 = 36$ $\quad n_2 = 25$ $\quad \sigma_2^2 = 25$

يكون توزيع النسبة بين تبايني العينتين هو:

$$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{25}{36} \sim F(20, 24)$$

وتكون قيمة الاحتمال هي:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 3.95\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{25}{36} > 3.95\frac{25}{36}\right) = P\left(f > 2.74\right) = 0.01$$