Table des matières

Chapitre 1

Suites et Séries de Fonctions

1.1 Suites de fonctions

Soit $\Bbbk$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient E et F deux parties non vide de $\Bbbk$.

Définition 1.1.1. *On appelle suite de fonctions, toute application* $f_n : \mathbb{N} \to £$, *où* $£ = £(E, \Bbbk)$ *est l'ensemble des applications de E dans F.*

1.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

En général, pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $f_n(x)$ sur une partie E de $\mathbb{R}$, on va essayer de fixer le réel x et on va faire l'étude de la suite numérique correspondante.

Définition 1.1.2. *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur E vers une fonction* $f(x_0)$, *lorsque la série numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, pour tout* $x_0 \in E$. *On définit ainsi une fonction f sur le domaine E par :*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x). \tag{1.1}$$

On dira alors que f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1.1. *Soit la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

* *Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$, et la suite converge vers 0.*
* *Si $x \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$.*

Finalement, la suite f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier, et sa limite est la fonction nulle $f(x) = 0$.

1.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 1.1.3. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers une fonction f si et seulement si :*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E, \text{ on a } \left|f_n(x) - f(x)\right| < \epsilon.$$

Remarque 1.1. *Cet entier n_0 dépend évidement uniquement de ϵ et pas de x. Par contre si n_0 dépend a prioré à la fois de x et de ϵ, on va dire que la convergence est simple sur E.*

Remarque 1.2. *La convergence uniforme sur E implique la convergence simple sur E.*

1.1.3 Une condition suffisante de convergence uniforme (convergence normale

Proposition 1.1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur E vers une fonction f. S'il existe une suite positive (b_n) convergente vers 0, telle que*

$$\forall x \in E,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < b_n,$$

alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E.
Dans ce cas, on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente sur E.

Démonstration. Supposons que b_n tend vers 0, quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que si } \forall n \geq n_0 \text{ on a } b_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Puisque :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < b_n < \frac{\epsilon}{2},\ \text{pour tout } x \in E.$$

On trouve :

$$\sup_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,\ \text{pour tout } x \in E.$$

□

1.1.4 Une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme

Proposition 1.1.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur E vers une fonction f. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f sur E, il faut et il suffit que la suite numérique (a_n) qui définie par :*

$$a_n = \sup_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right|,$$

soit convergente vers 0.

Démonstration. $\underline{\Rightarrow}$ Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f, alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E,\ \text{on a } \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par suite :

$$a_n = \sup_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

$\underline{\Leftarrow}$ Supposons maintenant que a_n tend vers 0, quand $n \to +\infty$, on a alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \text{on a } a_n < \epsilon.$$

Par suite :

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| \leq \sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right| = a_n < \epsilon, \text{ pour tout } x \in E.$$

$\square$

Remarque 1.3. *Une condition suffisante pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur E est l'existence d'une suite de points $(x_n) \subset E$, vérifiant :*

$$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right| \nrightarrow 0, \textit{ quand } n \to +\infty.$$

Exemple 1.1.2. *Soit la suite de fonctions f_n définie sur $[0,1]$ par :*

$$f_n(x) = x^n(1-x),\ n \in \mathbb{N}.$$

** Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$, et la suite converge vers 0.*
** Si $x \in \,]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.*
Finalement, la suite f_n converge simplement sur $[0,1]$ et sa limite est la fonction nulle $f(x) = 0$.
En effectuant un calcul simple, on trouve

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right| = a_n, \textit{ tel que } a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Cette dernière quantité équivalente au voisinage de l'infini à $\frac{1}{ne}$. Puisque cette quantité tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions considérée converge uniformément vers 0 sur le segment $[0,1]$.

1.1.5 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Proposition 1.1.3. *Pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f sur E, il faut et il suffit que :*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p,q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \textit{ et } \forall x \in E, \textit{ on a } \left|f_p(x)-f_q(x)\right| < \epsilon.$$

Démonstration. $\underline{\Rightarrow}$ Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f, alors :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E, \text{ on a } \left|f_n(x)-f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $\epsilon > 0$, alors pour tout $p > q \geq n_0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| & \leq & \left|f_p(x) - f(x)\right| + \left|f_q(x) - f(x)\right| \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ pour tout } x \in E. \end{array}$$

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E,\ \text{on a } \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \epsilon.$$

Faisons p tendre vers $+\infty$, on conclure le résultat. □

1.1.6 Propriétés des suites de fonctions uniformément convergentes

Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Proposition 1.1.4. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, convergeant uniformément sur le même segment vers une fonction f. Alors f est une fonction continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit x_0 un point quelconque de $[a, b]$.
f_n est continue au point x_0, alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in [a, b],\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E,\ \text{on a } \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \left|f(x) - f(x_0)\right| & = & \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)\right| \\ & & \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| + \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| \\ & < & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{array}$$

□

Remarque 1.4. *Sous les conditions de la proposition précédente, on peut écrire :*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f(x_0).$$

Intégration de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Proposition 1.1.5. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, convergeant uniformément sur le même segment vers une fonction f. Alors f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, et de plus :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Démonstration. Sous les hypothèses de la proposition 1.1.5, la limite uniforme f est aussi continue, ce qui assure l'intégrabilité de $f_n(x)$ et de f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E,\ \text{on a } \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{1.2}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\leq \int_a^b \left|(f_n(x) - f(x)\right| dx \\ &< \frac{\epsilon}{b-a}\left|\int_a^b dx\right| = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.1. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1.5, on déduit que la suite des intégrales $\left(\int_a^x f_n(y)dy\right)_n$ est uniformément convergente vers $\left(\int_a^x f(y)dy\right)_n$, pour tout $x \in [a, b]$.*

Démonstration. En effet, du fait que le rang n_0 dans la relation (1.2) ne dépend pas de b, il suffit de remplacer b par x. □

Dérivabilité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Proposition 1.1.6. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ et vérifié les trois conditions suivantes :*

1. f_n sont de classe C^1 sur un segment $[a, b]$.

2. (f_n)converge simplement sur le même segment vers une fonction f.

3. La suite des dérivées $(\dot{f_n})$ converge uniformément vers une fonction g.

Alors, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction dérivable f et de plus $\dot{f} = g$.

Démonstration. Puisque $(\dot{f_n})$ une suite de fonctions continue sur un segment $[a,b]$, convergeant uniformément sur le même segment vers une fonction g , alors l'utilisation de la proposition de l'intégration affirme que $\dot{f_n}$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$, et de plus :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x \dot{f_n}(x)dx.$$

D'après le Corollaire 1.1.1, la suite $\left(\int_a^x \dot{f_n}(x)dx\right) f_n$ converge uniformément, et la suite numérique $(f_n(a))$ l'est également, $(f_n(x))$ est donc la somme de deux suite uniformément convergentes, alors, elle est uniformément convergente. Nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x \dot{f_n}(x)dx = \int_a^x g(x)dx, \tag{1.3}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^x \dot{f_n}(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) = f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'utilisation de (1.3) et (1.4), nous donne :

$$\int_a^x g(x)dx = f(x) - f(a).$$

On dérive cette dernière égalité, on trouve :

$$g(x) = \dot{f}(x).$$

□

Remarque 1.5. *Sous les conditions de la proposition précédente, on peut écrire :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} f_n(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \dot{f}(x_0).$$

1.2 Séries de fonctions

Définition 1.2.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{k}$. Une série de fonctions de terme général f_n est un couple formé de deux suites de fonctions $\{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$*

définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{k}$, *telles que :*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in E.$$

S_n *est appelée la somme partielle d'ordre* n *de la série* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

1.2.1 Convergence simple

Définition 1.2.2. *Une série de fonctions de terme général* f_n, *converge simplement sur une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *et de somme* S, *si pour tout* $x \in E$, *la série numérique de terme général* $f_n(x)$ *converge de somme* $S(x)$.

Si la série converge simplement, le terme :

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in E.$$

est appelé le reste d'ordre n de la série de terme général f_n.
La convergence de la série de terme général f_n s'exprime alors par la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n(x))$. C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E, \text{ on a } |S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| < \epsilon.$$

Exemple 1.2.1. *Étudions la série de fonctions de terme gén"ral*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}+1}, \ n \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x \neq 0$, *le critère de d'Alembert nous donne* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = |x|$. *La série converge lorsque* $|x| < 1$ *et diverge lorsque* $|x| > 1$.
Si $x = -1$, *la série devient alternée et vérifie le criitère de convergence. Si* $x = 1$, *elle diverge.*
Finalement, la série de fonctions converge simplement sur $[-1, 1[$.

1.2.2 Convergence uniforme

Définition 1.2.3. *Une série de fonctions de terme général* f_n, *converge uniformément sur une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *et a pour somme* S, *lorsque la suite de ses sommes* *partielles est uniformément convergente sur E, c'est-à-dire :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \text{on a } \sup_{x\in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in E} |R_n(x)| < \epsilon.$$

Dire que la suite des sommes partielles converge uniformément sur E signifie donc que la suite de reste $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur E.

Remarque 1.6. *On peut définir une norme de la convergence uniforme de S_n sur E par :*

$$\|S_n\| = \sup_{x\in E} |S_n(x)|\,.$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément et de somme S si et seulement si la suite numérique $(\|S_n - S\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.2.3 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Théorème 1.2.1. *Pour que la série de fonctions de terme général f_n soit uniformément convergente sur E, il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E,\ \text{on a } \sup_{x\in E} \left|S_p(x) - S_q(x)\right| = \sup_{x\in E} \left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est la même que pour les suites en raisonnant sur la suite des sommes partielles. □

Corollaire 1.2.1. *L'utilisation du critère de Cauchy uniforme est souvent par sa contraposée, pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément.*

1.2.4 Une condition nécessaire de convergence uniforme

Proposition 1.2.1. *Pour q'une série de fonctions soit uniformément convergente, il est nécessaire que son terme général tend vers 0 uniformément.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy uniforme sur :

$$\left\|f_n\right\| = \sup_{x\in E}\left\|f_n(x)\right\| = \sup_{x\in E}\|S_n(x) - S_{n-1}\|. \tag{1.5}$$

□

1.2.5 Une condition suffisante de convergence uniforme (Critère de Weierstass)

Proposition 1.2.2. *(Proposition et définition) Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions définies sur E. S'il existe une série positive $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergente, telle que*

$$\forall x \in E,\ \left|f_n(x)\right| < b_n, \tag{1.6}$$

alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument et uniformément convergente sur E.
*Dans ce cas, on dit que la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **normalement** convergente sur E.*

Démonstration. De l'inégalité (1.6) et du théorème de comparaison, on déduit la convergence absolue.
D'autre part, la série numérique $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, c'est-à-dire :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que si } \forall n \geq n_0 \text{ on a } \sum_{k\geq n+1} b_k < \epsilon.$$

On a alors :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que si } \forall n \geq n_0 \text{ on a } \left|\sum_{k\geq n+1} f_k(x)\right| \leq \sum_{k\geq n+1} \left|f_k(x)\right| \leq \sum_{k\geq n+1} b_k < \epsilon$$

Cette dernière quantité indépendante de x, le reste de la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément vers 0, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est donc uniformément convergente. □

Exemple 1.2.2. *La série de fonction $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\sin(nx)}{\alpha^n}$, $\alpha > 1$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, puisque $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\alpha^n}\right| \leq \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente.*

1.2.6 Une condition nécessaire et suffisante de convergence normale

Proposition 1.2.3. *Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ soit normalement convergente sur E, il faut et il suffit que la série numérique (a_n) de terme générale :*

$$a_n = \sup_{x\in E} \left| f_n(x) \right|,$$

soit convergente.

Démonstration. $\Rightarrow$ Lorsque la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur E, il existe une série positive convergente de terme b_n vérifiant :

$$\forall x \in E, \ \left| f_n(x) \right| \leq b_n,$$

Par suite

$$a_n = \sup_{x\in E} \left| f_n(x) \right| \leq b_n,$$

et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente, on a alors :

$$\left| f_n(x) \right| \leq \sup_{x\in E} \left| f_n(x) \right| = a_n < \epsilon, \text{ pour tout } x \in E,$$

c'est la définition d'une série normalement convergente. □

Exemple 1.2.3. *La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ définie sur $[0, 1]$, tel que*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln^2 x \ si \ \ x \in]0, 1], \\ 0, \ si \ x = 0 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\dot{f_n}(x) = \ln(x)\,(2 + n\ln(x))\,x^{n-1} = 0, \ si \ x = \exp(\frac{-2}{\pi}) = x_n.$$

Par suite :

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) \right| = f_n(x_n) = \frac{4}{n^2 e^2},$$

terme général d'une série convergente. La série de fonctions est normalement convergente sur $[0, 1]$.

Proposition 1.2.4. *La convergence normale d'une série de fonctions sur une partie E de $\mathbb{R}$ implique la convergence uniforme de cette série sur E, et la réciproque est fausse.*

Démonstration. Lorsque la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur E, la démonstration se déroule de l'inégalité :

$$\sup_{x\in E}\left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in E}\left|f_k(x)\right|$$

et le critère de Cauchy.
La réciproque de cette proposition est fausse. A titre d'exemple, on prend la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x},\ x \in [0,1] \text{ et } n \geq 1.$$

cette série est uniformément convergente sans être normalement convergente sur $[0,1]$.
En effet, en utilisant la majoration du reste d'une série alternée :

$$|R_n(x)| \leq \left|f_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{n+1+x} < \frac{1}{n+1} < \epsilon,\ \text{pour tout } x \in [0,1]\,.$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $[0,1]$.
Par contre :

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)\right| = \frac{1}{n},$$

terme génral d'une série divergente, la série est donc ne converge pas normalement. □

1.2.7 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 1.2.5. *Soit une série de fonctions de terme général f_n, défini sur l'intervalle $[a,b]$, qui converge uniformément et de somme S sur $[a,b]$. Si f_n est* *continue sur $[a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors S est aussi continue sur $[a, b]$, et de plus, on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = S(x_0), \text{ pour tout } x_0 \in [a, b], \tag{1.7}$$

*ce qui est un cas **d'interversion de limite et somme infinie.***

Démonstration. Il suffit d'appliquer lla proposition 1.1.4 à la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$, qui sont continues comme sommes finies de fonctions continues. □

Remarque 1.7. *La condition de convergence uniforme des séries de fonctions est suffisante mais non nécessaire pour assurer la continuité des sommes.*

Remarque 1.8. *Lorsque la série de fonctions continues de terme général f_n converge simplement sur $[a, b]$ et a pour somme une fonction discontinue S, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$,ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.*

Exemple 1.2.4. *La série de fonctions continues de terme général :*

$$f_n(x) = \sin^2(x) \cos^n(x), \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et a pour somme :

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}, \ si \ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, \ si \ x = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Puisque S est discontinue en 0, $\sum_{n \geq 0} f_n$,ne donc converge pas uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Proposition 1.2.6. *Soit une série de fonctions de terme général f_n, défini sur $[a, b]$, qui converge uniformément et de somme S sur $[a, b]$. Si f_n est continue sur $[a, b]$,* *pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, la série de fonctions de terme général $\int_a^b f_n(x)dx$ converge et a pour somme $\int_a^b S(x)dx$, et de plus, on a l'égalité suivante :*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)dx\right),$$

*ce qui est un cas **d'interversion de somme infinie et d'intégrale.***

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.1.5 à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général f_n, qui sont continues sur $[a,b]$ comme sommes finies de fonctions continues . □

Exemple 1.2.5. *Soit la série de fonctions de terme général :*

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in [0,1].$$

Cette série converge uniformément sur $[0,1]$, puisque $|f_n(x)| \leq \frac{1}{(2n)!}$, pour tout $x \in [0,1]$.
D'après la propostion précédente, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}dx\right) &= \sum_{n\geq 0} \int_0^x \frac{x^{2n}}{(2n)!}dx \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sinh(x),\ \textit{pour tout } x \in [0,1].\end{aligned}$$

Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 1.2.7. *On considère une série de fonctions de terme général f_n, dérivable sur le segment $[a,b]$ et vérifiant :*
1. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $[a,b]$.
2. La série des dérivées, de terme général $\dot{f_n}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme une fonction g .
Alors, la série de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme une fonction dérivable S telle que :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial}{\partial x} f_n(x) = g(x),$$

ce qui est un cas ***d'interversion de somme infinie et de dérivation****.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.1.5 à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général f_n, qui sont dérivables comme sommes finies de fonctions dérivables. $\square$