Introduction à la théorie du contrôle
Série N°1
2MS-MAT. APP **2020/2021**

1. Pour stabiliser un pendule (dans un plan) autour de son équilibre instable (masse vers le haut, tige vers le bas). Le contrôle est l'accélération horizontale du pointinférieur de la tige, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse $X(t)$.La dynamique est donnée par:

$$lm\ddot{\theta}(t) = mg\sin(\theta(t)) - um\cos(\theta(t)), \qquad \forall t \geq 0.$$

où l est la langueur du pendule, m la masse fixée en $(X(t)+l\sin(\theta(t)), l\cos(\theta(t)))$, $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule avec la verticale.

a) Ecrire l'équation du mouvement sous la formed' un système du premier ordre.

b) Linéairiser le systtème autour d'équilibre vertical $\theta = \dot{\theta} = 0$ et du controle $u = 0$. Le système est-il contrôlable?

2. **Modèle proie-prédateurs** on suppose que on a un milieu peuplée par deux populations composée de proies en nombre x une prédateur en nombre y, le système qui régi les population est:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = -cy(t) + fx(t)y(t) \end{cases}$$

-Trouver une intégrale première du mouvement.

3. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

òu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Trouver l'ensemble des conditions initiales $M(t_0)$ pour lesquelles le système précédent est contrôlable à zéro.

4. Vérifier si le système suivant est contrôlable:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$