الفصل الثاني: الحركيات *Cinématique*

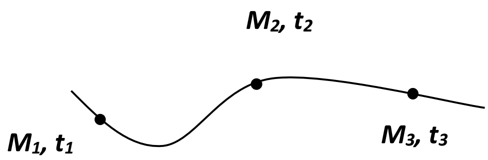
1. مقدمة:

تعُرّف حركة النقطة المادية بأنها التغير المستمر لوضعيتها بمرور الزمن. يمثل الميكانيك جزء الفيزياء الذي يهتم بدراسة حركة الاجسام في الطبيعة بدلالة الزمن. يتفرع علم الميكانيك إلى فرعين أساسين:

- **الحركيات**: ***Cinématique*** هو فرع الميكانيك الذي يهتم بالدراسة الوصفية ، دون التطرق إلى الأسباب التي تحدث الحركة
- **التحريك**: ***Dynamique*** هو فرع الميكانيك الذي يهتم بدراسة الأسباب (القوى) التي تؤدي إلى حركة الأجسام في الطبيعة.

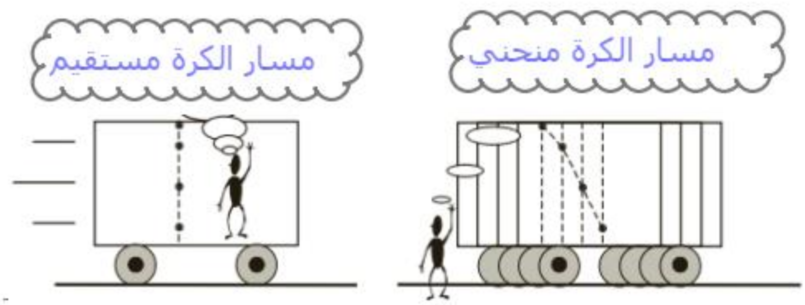
نهتم فيما سيأتي من دراستنا بحركة النقاط المادية. تعريفا **النقطة المادية** ***(point matériel)*** هي جسم مادي متناهي في الصغر (يسمى: الجسيم)، ثابت بالنسبة لذاته أي لا يدور حول نفسه و مهمل الأبعاد. نرفق به دائما مقدار سلمي موجب و هو **الكتلة** ***(la masse)*** يرمز لها بالرمز m .

نسمي مجموعة المواضع المختلفة التي تشغلها النقطة المادية طيلة حركتها **بالمسار** ***(trajectoire)***نقطة مادية، بعبارة أخرى هو المحل الهندسي الذي تشغله مع مرور الزمن



- إذا كان مسار الحركة خط مستقيم نقول إن الحركة مستقيمة
- إذا كان مسار الحركة دائرة نقول إن الحركة دائرية
- إذا كان مسار الحركة منحني نقول إن الحركة منحنية

يتطلب دراسة حركة نقطة مادية وجود ملاحظ يحلل الحركة. نتائج الدراسة تتعلق بوضعية الملاحظ مع أن الدراسة تتعلق بنفس النقطة المادية. فمثلا سقوط كرة في عربة قطار يتحرك على سكة مستقيمة بسرعة ثابت، فبالنسبة لملاحظ جالس داخل العربة فمسار الحركة مستقيم في حين بالنسبة لملاحظ أخر ساكن على الرصيف فمسار الكرة منحني. فحركة النقطة المادية **نسبية:** تتعلق بالملاحظ الثابت في **معلم (مرجع)** الدراسة. لذا من الضروري تحديد المعلم الذي فيه نختار دراسة النقطة المادية.



2. المعلم (جملة الإسناد) و جملة الاحداثيات

المعلم (*Référentiel*) نرمز له بـ: ***R*** أو ما يعرف بجملة الإسناد هو مجموع النقاط الثابتة بالنسبة لبعضها البعض وليست كلها في نفس المستوي. الملاحظ الذي يدرس حركة النقطة المادية هو ذاته ساكن في المعلم.

يتميز كل معلم باسمه في المثال السابق لدينا معلم القطار (وكل ما هو ساكن بالنسبة له) والمعلم الأرضي (وكل ما هو ساكن بالنسبة له). كما يمكن في لحظة زمنية تميز المعلم بنقطة مبدأ وثلاثة اتجاهات ثابتة في هذا المعلم فنتحدث عندها عن **جملة الإحداثيات**.

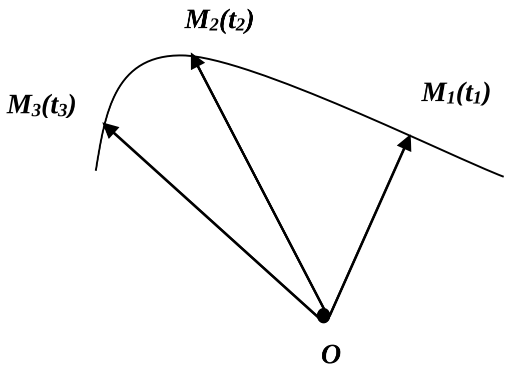
مثل لدراسة حركة الكواكب نختار معلم كوبرنيك ***(Copernic)*** الذي مركزه الشمس ومحاوره متعامد مثنى مثنى و متجهة نحو ثلاث نجوم ساكنة في الفضاء. أما جملة الاحداثيات المختارة فهي جملة الإحداثيات الكروية المميزة بالطول ***r*** و الزاويتين (θ, φ) كما سنفصل فيه لاحقا

3. عناصر الحركة:

نعتبر نقطة مادية ***M*** تتحرك في معلم ***R*** متعامد ومتجانس مبدأه ***O*** نعرف بدلالة الزمن مقادير شعاعية تمثل عناصر الحركة و هي:

1.3 شعاع الموضع: *Le vecteur de position*

تحدد وضعية النقطة المادية ***M*** **بشعاع الموضع** $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ الذي يربط مبدأ المعلم ***O*** بالوضعية التي تحتلها النقطة المادية عند لحظة زمنية ما ***t***



$$\overrightarrow{OM_1}(t_1) = \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t_1)$$
$$\overrightarrow{OM_2}(t_2) = \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}(t_2)$$
$$\overrightarrow{OM_3}(t_3) = \overrightarrow{OM_3} = \vec{r}(t_3)$$

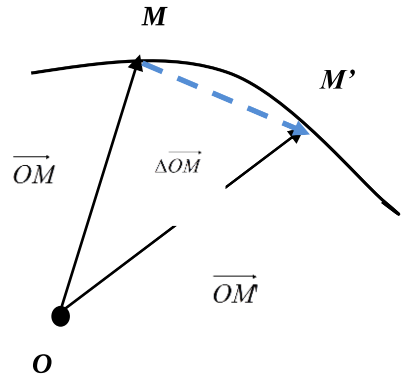
خلال الحركة، تتغير كلا من طويلة و اتجاه شعاع الموضع بمرور الزمن

2.3 شعاع الانتقال:

انتقال النقطة المادية، من الوضعية ***M*** المعرَّفَةُ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ إلى الوضعية ***M'*** المعرَّفَةُ بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM'}$ ، معرف بشعاع الانتقال $\overrightarrow{MM'}$ حيث:

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

شعاع الانتقال مستقل عن المبدأ $\boldsymbol{O}$ و عن المعلم المختار للدراسة.

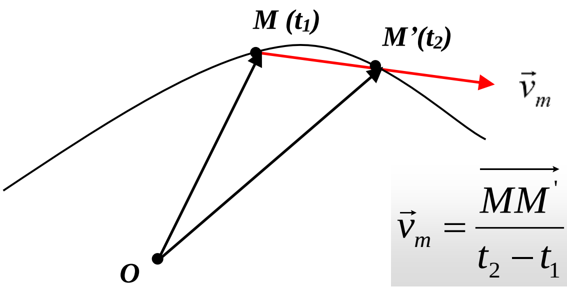


إذا كانت $\boldsymbol{M'}$ قريبة جدًّا من $\boldsymbol{M}$ ، فالانتقال بين النقطتين يصبح متناهي في الصغر. نقول إن **الانتقال عنصري** ونرمز له بالشعاع $d\overrightarrow{OM}$

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$
$$d\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

3.3 شعاع السرعة:

إذا احتلت النقطة المادية الوضعيتين $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{M'}$ خلال اللحظتين الزمنيتين $\boldsymbol{t_1}$ و $\boldsymbol{t_2}$ على التوالي، فنعرف **شعاع السرعة المتوسطة** بالمسافة المقطوعة خلال الفاصل الزمني لقطعها:



$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

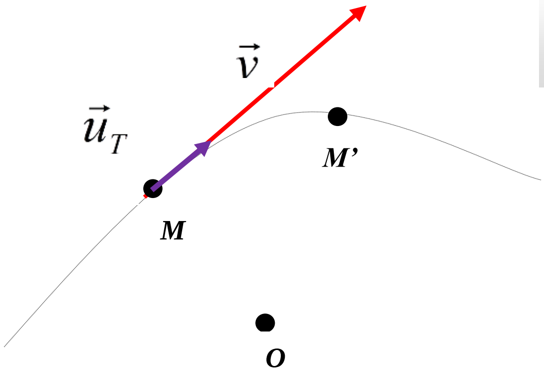
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

اتجاه شعاع السرعة المتوسطة هو اتجاه الحركة $\overrightarrow{MM'}$ أي من $\boldsymbol{M}$ نحو $\boldsymbol{M'}$ ، وطويلته تدل على المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن.

وحدة السرعة في النظام الدولي هي المتر/ثانية رمزه $\boldsymbol{m.s^{-1}}$

إذا كانت ***M’*** قريبة جدًّا من ***M*** يصبح الانتقال عنصري و الفاصل الزمني متناهي في الصغر و تصبح السرعة المتوسطة توافق السرعة اللحظية للوضعية ***M***:

$$\vec{v}=\lim_{t_é\to t_1}\vec{v}_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$



$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{r'}-\overrightarrow{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

لما $\Delta t\to 0$ فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يصبح مماسيا للمسار و منه السرعة اللحظية تكون دوما مماسيه للمسار و اتجاهها هو اتجاه الحركة.

- **إذا كانت طويلة شعاع السرعة ثابتة نقول إن الحركة منتظمة**

4.3 شعاع التسارع

يعبر شعاع السرعة عن تغيرات شعاع الموضع بالنسبة للزمن، بنفس الطريقة يمكن تعريف عنصر جديد يصف الحركة و يعبر عن تغيرات شعاع السرعة بالنسبة للزمن ندعوه **شعاع التسارع**. إذا احتلت النقطة المادية الوضعيتين ***M*** و ***M’*** خلال اللحظتين الزمنيتين t_1 و t_2 على التوالي، فنعرف **شعاع التسارع المتوسط:**

$$\vec{\gamma}_m(t)=\frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{\Delta t}$$

$$\vec{\gamma}_m(t)=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

يكون شعاع التسارع المتوسط موازيا $\Delta\vec{v}$

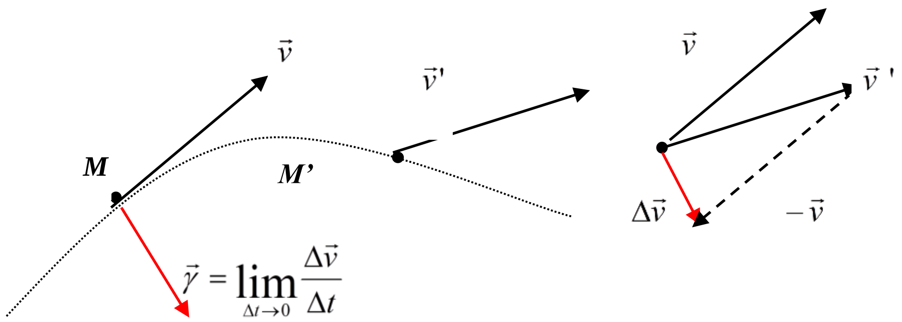
وحدة التسارع في النظام الدولي هي المتر/ثانية مربع رمزه $m.s^{-2}$

إذا كانت ***M’*** قريبة جدًّا من ***M*** يصبح الانتقال عنصري و الفاصل الزمني متناهي في الصغر فإن:

$$\vec{\gamma}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_1}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- **إذا كانت طويلة شعاع التسارع ثابتة نقول إن الحركة متغيرة بانتظام**



4. دراسة الحركة في مختلف جمل الإحداثيات

يتعلق اختيار جملة الاحداثيات بنوع حركة الجسم. في حالة الحركة المستقيمة، مستوى مائلا مثلا، من البديهي اختيار الإحداثيات الديكارتية لأنها أكثر ملائمة. لكن في حالة الحركة المنحنية سنستعمل الاحداثيات القطبية أو الاسطوانية أو الذاتية، والتي سوف نتطرق لها في هذا الجزء.

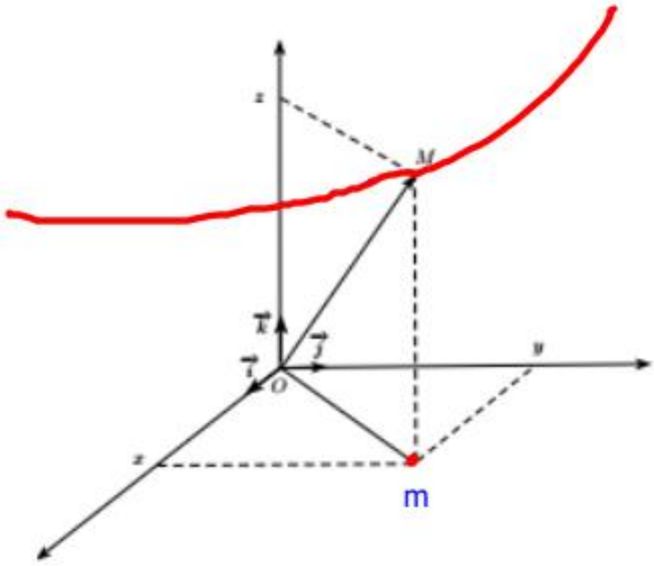
1.4 الإحداثيات الديكارتية: *Les coordonnées cartésiennes*

تتحرك النقطة المادية في الفضاء المزود بالمعلم الديكارتي ذو الأساس (القاعدة) المباشر والمتعامد و المتجانس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

في كل لحظة زمنية نحدد موضع النقطة المادية بإحداثياتها:

$x(t)$ الفاصلة و $y(t)$ الترتيب و $z(t)$ الارتفاع ، و التي تمثل الإسقاطات العمودية على المحاور $(X'X, Y'Y, Z'Z)$

شعاع الموضع: من الشكل بتطبيق علاقة شال فإن شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية يكتب كما يلي:



$$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{0M} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$x(t) \quad y(t) \quad z(t)$ تسمى **المعادلات الوسيطية أو الزمنية** للحركة: ***Les équations paramétriques ou temporaires du mouvement*** و هي العلاقات التي تربط مركبات شعاع الموضع بالزمن.

لإيجاد **معادلة المسار** نلغي الزمن و نجد العلاقة بين الاحداثيات فقط من الشكل: $f(x, y, z) = 0$

و طويلته شعاع الموضع: $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

مجالات تغير مركبات شعاع الموضع:

$x(t) \in]-\infty, +\infty[\qquad y(t) \in]-\infty, +\infty[\qquad z(t) \in]-\infty, +\infty[$

شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{0M}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + x(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + y(t)\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z(t)\frac{d\vec{k}}{dt}$$

أشعة الوحدة ثابتة(ساكنة): $\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{0} \quad \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{0} \quad \frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{0}$

$$\vec{v}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

كما اتفقنا برمز للمشتقة بالنسبة للإحداثية بفتحة فوق المقدار $\frac{df}{dx}=f'$ سنتفق على أن نرمز للاشتقاق بالنسبة للزمن بنقطة فوق المقدار $\frac{df}{dt}=\dot{f}$ أما المشتقة الثانية نرمز لها بـــ $\frac{d^2 f}{dt2}=\ddot{f}$.

وعليه نكتب بالنسبة للسرعة:

$$\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_Z\vec{k}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x},\ v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad v_Z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}$$

و الطويلة: $v=\|\vec{v}\|=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}$

أو بالشكل: $v=\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\dot{x}\right)^2+\left(\dot{y}\right)^2+\left(\dot{z}\right)^2}$

التسارع:

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dtj}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}=\dot{v}_x\vec{i}+\dot{v}_y\vec{j}+\dot{v}_z\vec{k}$$

كما يمكن التعبير عنه بدلالة الاحداثيات:

$$\vec{\gamma}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

حيث:

$$\gamma_x=\dot{v}_x=\ddot{x}$$

$$\gamma_y=\dot{v}_y=\ddot{y}$$

$$\gamma_z=\dot{v}_z=\ddot{z}$$

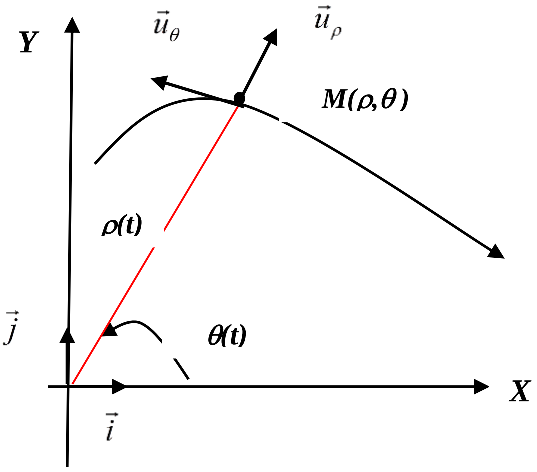
و الطويلة: $$\gamma=\|\vec{\gamma}\|=\sqrt{\gamma_x^{\,2}+\gamma_y^{\,2}+\gamma_z^{\,2}}$$

- تستعمل الاحداثيات الديكارتية عادة لدراسة الحركات المستقيمة

2.4 الإحداثيات القطبية: *Les coordonnées polaires*

تستعمل الإحداثيات القطبية لدراسة الحركة المنحنية لنقطة مادية في المستوي. فبدلا من دراسة النقطة المادية بدلالة الإحداثيات الديكارتية (x,y) و أشعة الوحدة الساكنة $(\vec{i},\vec{j})$, نستعمل **الإحداثيات** (ρ,θ) حيث مبدأ المعلم القطبي هو النقطة المادية.

لتكن نقطة مادية ***M*** تتحرك على طول منحني، نعرف الاحداثيات القطبية انطلاقا من الاحداثيات الديكارتية كما يلي:



$$\rho=\|\overrightarrow{0M}\|$$ $$\theta=(\overrightarrow{0x},\overrightarrow{0M})$$

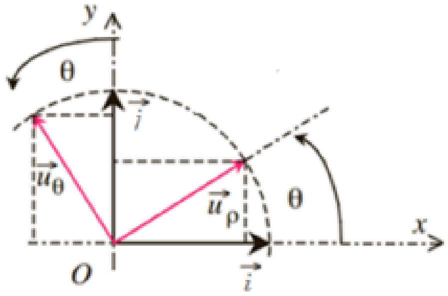
حيث: $\rho\in[0,+\infty[$ و $0\le\theta\le 2\pi$

ونعرف أشعة الوحدة **المتحركة** $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ كما يلي:

- شعاع الوحدة $\vec{u}_\rho$ هو شعاع الوحدة المحمول على شعاع الموضع $\overrightarrow{0M}$ و اتجاهه هو باتجاه تزايد ρ
- شعاع الوحدة $\vec{u}_\theta$ يعبر عن تغير شعاع الوحدة $\vec{u}_\rho$ بتغير الزاوية θ: $\vec{u}_\theta=\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$، و اتجاهه هو باتجاه تزايد الزاوية القطبية θ

للإنتقال من جملة احداثيات لأخرى نبحث عن عبارة أشعة الوحدة لجملة بدلالة الأخرى:

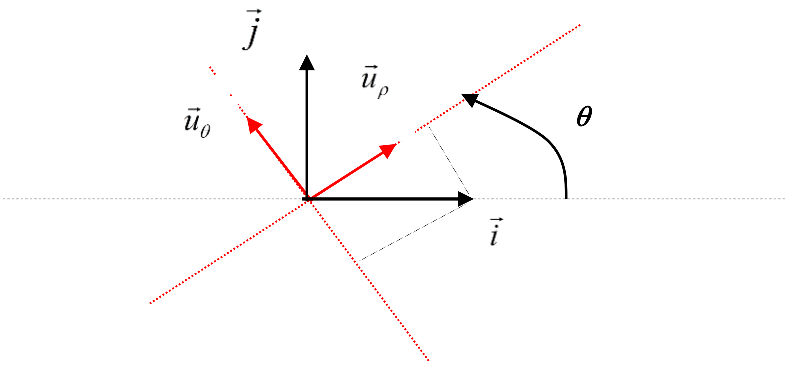
- **عبارة أشعة الوحدة القطبية الوحدة بدلالة أشعة الوحدة الديكارتية:** نسحب أشعة الوحدة القطبية إلى المبدأ المعلم الديكارتي و نسقطها على المحاور $(x'x,y'y)$:



$$\vec{u}_\rho=\cos\theta.\vec{i}+\sin\theta.\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta=-\sin\theta.\vec{i}+\cos\theta.\vec{j}$$

و بنفس الطريقة لإيجاد عبارة $(\vec{i},\vec{j})$ بدلالة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ نسحبها لمبدأ المعلم القطبي ونسقطها على المحاور نجد:



$$\vec{i}=\cos\theta.\vec{u}_\rho-\sin\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{j}=\sin\theta.\vec{u}_\rho+\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

شعاع الموضع في الاحداثيات القطبية (بالرجوع للشكل):

$$\overrightarrow{OM}=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\vec{u}_\rho=\rho.\vec{u}_\rho$$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\rho=\rho(t)\geq 0$$

***العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية و الإحداثيات القطبية:**

بالرجوع دوما للشكل لدينا:

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{0M}=\rho\vec{u}_\rho=\rho\cos\theta\vec{i}+\rho\sin\theta\;\vec{j}$$

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$tg\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow\theta=Arc\,tg\left(\frac{y}{x}\right)$$

مثال:

أوجد الإحداثيات القطبية للنقاط التالية ذات الإحداثيات الديكارتية ***A(4,3) et B(5,2)***

أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقاط التالية ذات الإحداثيات القطبية ***C(6, π/6)*** و ***D(4, 2π/3)***

الحل:

السرعة:

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_{\rho}+\rho.\frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}$$

حساب $\frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}=\frac{d\vec{u}_{\rho}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}.\frac{d(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})}{d\theta}=\dot{\theta}.(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})=\dot{\theta}.\vec{u}_{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}=\dot{\theta}.\vec{u}_{\theta}}$$

بنفس الطريقة تحقق من أن:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_{\theta}}{dt}=-\dot{\theta}.\vec{u}_{\rho}}$$

و منه بالتعويض في عبارة السرعة تصبح:

$$\boxed{\vec{v}=\dot{\rho}\vec{u}_{\rho}+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_{\theta}}$$

$$\boxed{\vec{v}=v_{\rho}.\vec{u}_{\rho}+v_{\theta}.\vec{u}_{\theta}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v_{\rho}&=\dot{\rho}\\ v_{\theta}&=\rho.\dot{\theta}\end{aligned}}$$

التسارع:

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_{\rho}+\dot{\rho}\frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_{\theta}+\rho.\frac{d\dot{\theta}}{dt}.\vec{u}_{\theta}+\rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_{\theta}}{dt}$$

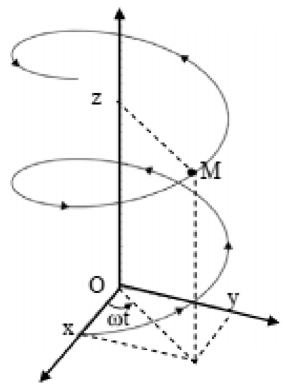
$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho.\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho.\dot{\theta}^2\ \vec{u}_\rho$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

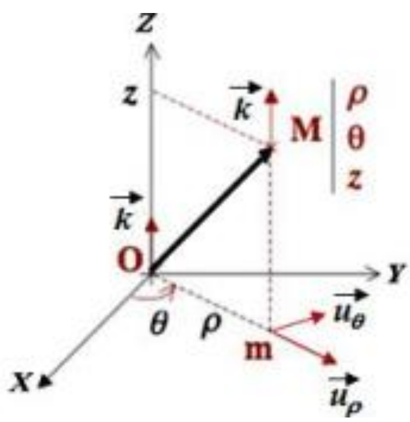
$$\vec{\gamma} = \gamma_\rho.\vec{u}_\rho + \gamma_\theta.\vec{u}_\theta$$

3.4 الإحداثيات الأسطوانية *Les coordonnées cylindriques*

تستعمل الإحداثيات الأسطوانية لدراسة حركة نقطة مادية تتحرك في الفضاء وكان لمسار النقطة المادية تناظر محوري و محوره هو المحور $(0z)$مثل دراسة الحركة اللولابية لنقطة مادية.



فبدلا من دراسة النقطة المادية بدلالة الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) و أشعة الوحدة الساكنة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, نستعمل **الإحداثيات الأسطوانية** (ρ, θ, z) و أشعة الوحدة المتحركة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ أو $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.



<u>شعاع الموضع:</u>

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$\overrightarrow{mM} = z\vec{k}$ و $\overrightarrow{Om} = \rho\vec{u}_\rho$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

وطويلته:

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

مجال تغييرات الاحداثيات الاسطوانية:

$$\theta \in [0,2\pi] \qquad \rho \in [0,+\infty[\qquad z \in]-\infty,+\infty[$$

<u>*العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية و الإحداثيات الأسطوانية:</u>

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = Arc\,tg\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

مثال:

أوجد الإحداثيات الأسطوانية للنقاط التالية ذات الإحداثيات الديكارتية ***B(2, 3, 1)*** ***A(3,4,5)***

الحل

<u>السرعة:</u>

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_\rho.\vec{u}_\rho + v_\theta.\vec{u}_\theta + \vec{v}_z.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{k}$$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\theta = \rho.\dot{\theta}$$
$$v_z = \dot{z}$$

التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho.\frac{d\dot{\theta}}{dt}.\vec{u}_\theta + \rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

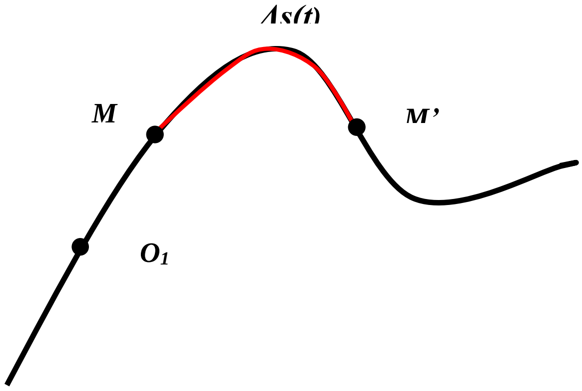
$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho.\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho.\dot{\theta}^2\ \vec{u}_\rho + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_\rho.\vec{u}_\rho + \gamma_\theta.\vec{u}_\theta + \gamma_z\vec{k}$$

5-4 الإحداثيات الذاتية و الفاصـــلة المنحنية *Les coordonnées intrinsèques et l'abscisse curviligne*

نعتبر نقطة مادية تتحرك حركة منحنية مسارها كيفي. لتكن M الوضعية عند اللحظة t و M' الوضعية عند اللحظة $t' = t + \Delta t$. تحدد وضعية المتحرك في كل لحظة **بطول القوس** الذي قطعه على المنحنى. لتكن ***O₁*** الوضعية الابتدائية على المنحنى. و منه:



$$O_1M' = s(t + \Delta t)$$
$$O_1M = s(t)$$

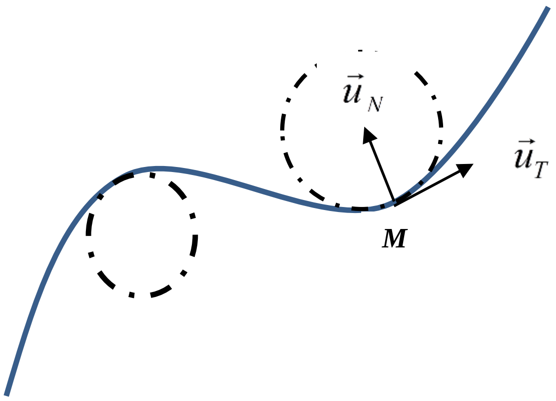
تمثل S **الفاصلة المنحنية** و التي تمثل طول القوس.

$$MM' = O_1M' - O_1M = s(t+\Delta t) - s(t) = \Delta s$$
$$MM' = \Delta s$$

المعلم المرفق بالفاصلة المنحنية يعرف بالمعلم الذاتي أو ما يسمى معلم ***Frenet*** مبدأه المتحرك و أشعة قاعدته (أساسه):

$\vec{u}_T$: شعاع الوحدة المماسي للمسار اتجاهه بتزايد الحركة (بتزايد الفاصلة المنحنية)

$\vec{u}_N$: شعاع الوحدة الناظمي على $\vec{u}_T$ ($\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ في نفس المستوي) و اتجاهه نحو مركز تقعر المسار أي نحو مركز الدائرة المماسة محليا للمسار



$\vec{u}_B$ شعاع الوحدة الناظمي على $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ حيث: $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$

السرعة في الإحداثيات الذاتية:

عرفنا السرعة اللحظية:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

كما وجدنا سابقا أن السرعة اللحظية دوما مماسيه للمسار أي يمكن كتابة :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$\vec{u}_T = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{\vec{v}}{v}$$

و منه تكتب السرعة في الاحداثيات الذاتية:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{u}_T = \dot{s}.\vec{u}_T$$

*** التسارع في الإحداثيات الذاتية:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}.\vec{u}_T\right) = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{u}_T + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{s}.\vec{u}_T + \dot{s}\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

لنحسب $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{dt}.\frac{ds}{ds}.\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\vec{u}_T}{d\theta}.\frac{ds}{dt}.\frac{d\theta}{ds} = \vec{u}_N.\dot{s}.\frac{1}{R}$$

حيث: ***R*** نصف قطر الانحناء و $\vec{u}_N = \frac{d\vec{u}_T}{d\theta}$

$$\vec{\gamma} = \ddot{s}\,\vec{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$$

مركبة التسارع المماسية : $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$

مركبة التسارع الناظمية: $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$

و منه طويلة التسارع في الاحداثيات الذاتية: $\gamma = \sqrt{\gamma_N{}^2 + \gamma_T{}^2}$

ملاحظات:

1. تعين **المركبة المماسية للتسارع** كيفية تغير قيمة السرعة مع الزمن:

- فلما تكون **موجبة** $\gamma_T > 0$: يكون التسارع المماسي و السرعة في نفس الإتجاه. و تكون **الحركة منحنية متسارعة**.
- أما إذا كانت **سالبة** $\gamma_T < 0$; فإن التسارع المماسي و السرعة متعاكسان في الاتجاه. و تكون **الحركة منحنية متباطئة**.
- و تكون **الحركة منحنية منتظمة** لما **ينعدم التسارع المماسي** $\gamma_T = 0$. في هذه الحالة نقول بأن **التسارع مركزي**.

2. أما **المركبة الناظمية للتسارع** γ_N : فتعين كيفية تغير اتجاه شعاع السرعة أثناء الحركة. و هي **دائما موجبة** و **موجهة نحو مركز الانحناء**.

3. و **ينعدم** التسارع الناظمي $\gamma_N = 0$; في حالة واحدة فقط, لما يكون نصف قطر الانحناء كبير جدا $(R \to +\infty)$. أي عندما يكون **المسار مستقيم** أو حالة الحركة المستقيمة le mouvement rectilingne.

5 دراسة بعض الحركات:

5- 1 الحركة المستقيمة ***le mouvement rectiligne*** : نقول عن حركة أنها مستقيمة إذا كان المسار عبارة عن خط مستقيم. ليكن $(x'x)$ المحور الذي تتم عليه الحركة و x الفاصلة و منه:

$$\overrightarrow{0M} = x\vec{i} \Rightarrow \quad \vec{V} = \dot{x}\vec{i} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\gamma} = \ddot{x}\vec{i}$$

أ- الحركة المستقيمة المنتظمة: ***le mouvement rectiligne uniforme***: نقول عن حركة أنها مستقيمة منتظمة إذا كان تسارعها معدوم (أو سرعتها ثابتة) و نكتب معادلتها الزمنية كما يلي:

$$\gamma = 0 \Rightarrow V = cte = V_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = V_0 \int_0^t dt \Rightarrow x = V_0 t + x_0$$

حيث x_0 تمثل الفاصلة الإبتدائية.

ب- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام ***le mouvement rectiligne uniformément varié***:

نقول عن حركة أنها مستقيمة المتغيرة بانتظام إذا كان تسارعها ثابت و تكتب معادلتها الزمنية كما يلي:

$$\gamma = cte = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \gamma \int_0^t dt \Rightarrow V = \gamma t + V_0$$

$$V = \gamma t + V_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (\gamma t + V_0) dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0$$

ملاحظة:

1- إذا كان $\vec{V} \bullet \vec{\gamma} \rangle 0$ نقول بأن الحركة متسارعة (mvt accéléré)

2- إذا كان $\vec{V} \bullet \vec{\gamma} \langle 0$ نقول بأن الحركة متباطئة (mvt retardé)

3-

$$V = \gamma t + V_0 \Rightarrow V^2 = \gamma^2 t^2 + 2\gamma V_0 t + V_0^2 \Rightarrow$$
$$V^2 - V_0^2 = 2\gamma\left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t\right) = 2\gamma(x - x_0)$$
$$si : x_0 = 0 \Rightarrow V_f^2 - V_i^2 = 2\gamma x$$

II- 5- 12 الحركة الدائرية ***le mouvement circulaire***: نقول عن حركة أنها دائرية إذا كان مسارها عبارة عن دائرة. لدراستها نستعمل الإحداثيات القطبية. حيث:

$$\overrightarrow{0M} = R\vec{u}_{\rho} \Rightarrow \vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u}_{\theta} \Rightarrow \overrightarrow{\gamma} = -R\dot{\theta}^{2}\vec{u}_{\rho} + R\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta}$$

- $\dot{\theta}$ تمثل السرعة الزاوية *la vitesse angulaire* وتقاس: rad/s
- $\ddot{\theta}$ (أو α) فتمثل التسارع الزاوي *l'accélération angulaire* . و يصبح لدينا: $V = R\dot{\theta}$.

أ- الحركة الدائرية المنتظمة *le mouvement circulaire uniforme*:

هي حركة تسارعها الزاوي معدوم (أو سرعتها الزاوية ثابتة). و تكتب معادلتها الزمنية كما يلي:

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte = \omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega \int_{0}^{t} dt \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

θ_0 تمثل الزاوية الابتدائية.

ب- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام ***le mouvement circulaire uniformément varié***: هي حركة تسارعها الزاوي ثابت. و تكتب معادلتها الزمنية كما يلي:

$$\ddot{\theta} = cte = \alpha = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \alpha \int_{0}^{t} dt \Rightarrow \dot{\theta} = \alpha t + \dot{\theta}_0$$

$$on\ a\ aussi : \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t + \dot{\theta}_0 \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{0}^{t} \left(\alpha t + \dot{\theta}_0\right) dt \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

$\dot{\theta}_0$ تمثل السرعة الزاوية الابتدائية.