Centre Universitaire De MILA
Institut Des Sciences Et Technologies
Département MI

Année universitaire : 2020-2021
2ème année Informatique LMD
Module : Logique Mathématique

TD 03 : Formes normales et systèmes de preuves

Exercice 1 :

I- Les formules suivantes sont-elles sous forme conjonctive normale ?

1. $a \vee b$
2. $\neg(a \vee b) \vee c$
3. $a \wedge b \wedge \neg c$
4. $a \vee b \wedge c \vee d$
5. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \vee d$
6. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c \vee d)$
7. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c \wedge d)$
8. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge d$
9. $(\neg a \vee b) \wedge \neg(\neg a \vee c) \wedge (d \vee e)$
10. $(\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg c \wedge (d \vee e)$

II- Mettre les formules suivantes sous FNC puis sous FND (on va choisir une) :

1. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
2. $p \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
3. $(p \wedge \neg(q \vee \neg r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (p \wedge r))$
4. $(p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg r)) \wedge (r \leftrightarrow \neg s)$

III- On désigne par **If** le connecteur « Si …alors …sinon » dont voici la table de vérité :

Donner une formule équivalente à If (X, A, B) qui est :

a) Une forme normale disjonctive, puis une forme normale conjonctive ;

b) Simplifiez les formules précédentes jusqu'à obtention d'une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune et une autre conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;

X	**A**	**B**	**If(X,A,B)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercice 02 :

I- En utilisant la méthode des tableaux sémantiques, déterminez si les formules suivantes sont satisfaites, valides, ou insatisfaisables (on va choisir une) :

a) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$
b) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p$
c) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
d) $((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow (p \vee q)$
e) $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$
f) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Exercice 03 :

I- A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les séquents suivants (on va choisir une) :

a) $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
b) $p \wedge q\ ,\ r \vdash q \wedge r$
c) $p \wedge \neg p \vdash q \wedge \neg q$
d) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
e) $p,\ p \rightarrow q,\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
f) $p \vee q \vdash q \vee p$
g) $\vdash \neg\neg p \rightarrow p$
h) $p \rightarrow (p \rightarrow \neg p),\ p \vdash \neg p$

<u>Exercice 04 *(supplémentaire)* :</u>

I- En utilisant la méthode des tableaux sémantique, étudier la satisfaisabilité des expressions suivantes :

g) $((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
h) $(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
i) $(p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$
j) $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$

II- A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les séquents suivants :

1. $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$
2. $q \rightarrow (p \rightarrow r),\ \neg r,\ q \vdash \neg p$
3. $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$
4. $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$
5. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
6. $q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$