Centre Universitaire De MILA
Institut Des Sciences Et Technologies
Département MI

Année universitaire : 2020-2021
2ème année Informatique LMD
Module : Logique Mathématique

Série de TD n° 2 : sémantique du calcul propositionnel

Exercice1 :

I-

$F= \neg((\neg\neg (\neg p\wedge q)\longrightarrow (p\leftrightarrow\neg r))\vee\neg\neg s)$

-Déterminez la valeur de vérité de la formule F dans les valuations suivantes :

V1 : v1(p)=1 , v1(q)=1 , v1(r)= 0, v1(s)=1

V2 : v2(p)=0 , v2(q)= 0, v2(r)=0 , v2(s)=1

II-

$F= \neg(((\neg p\vee\neg q)\longrightarrow \neg (p\leftrightarrow r))\vee\neg\neg p)$

$G= ((p\longrightarrow q)\longrightarrow(\neg q\longrightarrow\neg p))$

$H= (p\wedge((\neg p\vee q)\wedge\neg q))$

Pour chaque formule (on va choisir une) :

1) Dressez sa table de vérité.
2) On déduire sa nature (tautologie, antilogie ou satisfaite) ;
3) On déduire ses modèles.

Exercice2 :

Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

- Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
- Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
- Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
- Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2. Que peut-on en déduire sur qui commande un dessert ?

Exercice3 :

1- Montrez que les formules suivantes sont équivalentes en utilisant la TV:
   - $(p\vee(q\wedge r)),((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

2- Même question pour les formules mais sans passer par la TV (on va choisir une) :
   - $(\neg p\vee(q\longrightarrow\neg p)), (\neg p\vee\neg q)$
   - $(p\longrightarrow q), ((p\vee q)\leftrightarrow q)$
   - $(((p\rightarrow r)\vee((\neg q\vee s)\vee(s\wedge q)))\wedge((p\wedge q)\rightarrow(r\vee s))), \ ((p\rightarrow s)\vee(q\rightarrow r))$

3- Montrez que les formules suivantes ne sont pas équivalentes :
   - $(p\longrightarrow q)$ et $(q\longrightarrow p)$
   - $((p\longrightarrow q)\longrightarrow r)$ et $(p\longrightarrow(q\longrightarrow r))$

Exercice 4 :

$\Sigma 1= \{\neg p, (p\longrightarrow q), (\neg q\vee r)\}$

$\Sigma 2= \{(p\wedge q), (\neg p\longrightarrow q), \neg q, r\}$

$\Sigma 3= \{\neg p, (p\longrightarrow r), (\neg p\vee q), (q\longrightarrow r)\}$

$F= (r\longrightarrow\neg p)$

1-On déduire la nature des deux ensembles $\Sigma 1$et $\Sigma 2$.

2-Montrez que $\Sigma 1$est équivalente à $\Sigma 3$.

3-F est-il conséquence logique de $\Sigma 1$?

Exercice 5:

Brown, Smith et Jones sont accusés d'un crime. Leurs témoignages sont les suivants :
Brown : « Jones est coupable et Smith est innocent »
Jones : « Si Brown est coupable alors Smith aussi »
Smith : « Je suis innocent mais au moins un des deux autres est coupable »

1. Après avoir bien explicité le choix des variables propositionnelles, exprimer le témoignage de chacun d'eux sous forme propositionnelle.
2. Dresser la table de vérité de ces formules.
3. Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles ?
4. Le témoignage de l'un des suspects découle de celui d'un autre suspect. Lequel ?
5. Le témoignage de l'un des suspects découle de celui des deux autres suspects. Lesquels ?
6. En supposant que tous sont innocents, qui a fait un faux témoignage ?
7. Si tous disent vrai, lequel est coupable, lequel est innocent ?

Exercice 6 (*supplémentaire*):

Considérons l'extension du calcul propositionnel par les deux symboles $\top$ et $\bot$.

1- Construire la table de vérité des formules suivantes :
   a) $((\neg p \wedge q) \longrightarrow \neg(r \wedge \top))$
   b) $((p \longrightarrow (q \vee \bot))$

2- Montrer que $((p \longrightarrow q) \vee (\neg p \longrightarrow q))$ est une tautologie et $\neg\,(((p \longrightarrow q) \longrightarrow p) \vee \neg p)$ est une antilogie (sans passage par la TV).

Exercice 7 (*supplémentaire*):

On définit le sous ensemble $\mathcal{F}_{\{\neg,\wedge\}}$ de $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des formules propositionnelles n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

-Montrer que le système $\{\neg,\wedge\}$ est complet (c.à.d. toute formule $F \in \mathcal{F}$ est équivalente à une formule $F' \in \mathcal{F}_{\{\neg,\wedge\}}$).

-Même question pour $\{\neg,\longrightarrow\}$.