Centre Universitaire Abdelhafide Boussouf Mila
Institut de science et technologie
Licence biologie

TD 02

Exercice 01

Soient A et B deux événements tels que $P(A)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer $P(B)$.

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer $P(B)$.

3. Calculer $P(B)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Correction

1. A et B incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$.

2. A et B indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)\Rightarrow \frac{4}{5}P(B)=\frac{3}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$.

3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B,

$P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Exercice 02

1. Montrer que, pour 3 événements quelconques A, B, C, on a :

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$.

2. Généraliser dans le cas de n événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

Correction

1. On prend par exemple $B\cup C=E$, soit $P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)$,

$P(E)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ et

$A\cap E=(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow P(A\cap E)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)$
$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

donc en remplaçant on obtient la formule.

2. Même chose, par récurrence (bof… et très pénible).

Exercice 03

Soient A, B et C des événements. On pose $E_1=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ et $E_2=A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.

2. Déterminer l'ensemble $E_1\cup E_2$.

3. On sait que $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}4$, $P(C)=0{,}3$, $P(B\cap C)=0{,}1$, $P(A\cap C)=0{,}1$, $P(A\cap B)=0{,}2$ et $P(A\cap B\cap C)=0{,}05$. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Correction

1. $E_1\cap E_2 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap(B\cup C)=\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap C\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ donc en appelant $K=B\cup C$, on a $E_1\cup E_2=\left(A\cap\overline{K}\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0{,}4+0{,}3-0{,}1=0{,}6$, $P\left(\overline{B\cup C}\right)=0{,}4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0{,}6$.

En utilisant la formule de l'exo 9, on a

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0{,}6+0{,}4+0{,}3-0{,}1-0{,}1-0{,}2+0{,}05=0{,}95$; par ailleurs

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0{,}95=0{,}6+0{,}6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0{,}25$

et enfin $P(E_1)=0{,}6-0{,}25=0{,}35$.

Exercice 04

On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=1/2 et P(2)=P(6)=1/4. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Correction

Il manque $P(5)=1-3\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

1. Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (on enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).

2. Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.