مقدمة

يحدث في أغلب التوزيعات التكرارية أن تتراكم القيم عند قيمة متوسطة، وهو ما يعرف بظاهرة النزعة المركزية؛ أي مدى تمركز القيم التي تم جمعها حول قيمة ما. ولمعرفة ذلك يتم اللجوء إلى أدوات تحليلية تسمى بمقاييس النزعة المركزية. سوف نتطرق في هذا الفصل إلى:

- المتوسط الحسابي.
- المتوسط الهندسي.
- المتوسط التربيعي.
- المتوسط التوافقي.
- الوسيط.
- المنوال.

1.المتوسط الحسابي(La moyenne arithmétique)

1.1.المتوسط الحسابي البسيط[1]: وهو عبارة عن نسبة مجموع القيم إلى عدد القيم، يرمز له بالرمز($\bar{X}$) ويتم حسابه بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = \frac{x1 + x2 + \ldots\ldots + xn}{N} \quad \ldots(1)$$

مثال1 : أحسب المتوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية التالية: S: 8, 9,10,13,15

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = \frac{8+5+9+10+13+15}{5} = \frac{60}{6} = 10$$

2.1. المتوسط الحسابي المرجح (La moyenne arithmétique pondérée)

مثال 2: نفترض السلسلة الإحصائية التالية: S: 8,13,5,8,5,9,13,25,13,9.

نلاحظ وجود قيم مكررة أكثر من مرة واحدة مثل القيمة 5 والقيمة 8 و9و13. وبالتالي يمكن تسهيل عملية عرض السلسلة من خلال العرض التالي:

[1] La somme des valeurs divisée par le nombre des valeurs.

x_i	5	8	9	13	25	$\sum$
n_i	2	2	2	3	1	
n_ix_i	10	16	18	39	25	108

$$\bar{X} = \frac{(5\times 2)+(8\times 2)+(9\times 2)+(13\times 2)+25}{10}$$

$$\bar{X} = \frac{108}{10} = 10.8$$

$$\sum_{i=1}^{5} niX_i = 108$$

إذن يتم حساب المتوسط الحسابي المرجح من خلال العلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} niX_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} niX_i}{N} \ldots(2)$$

3.1. المتوسط الحسابي للتوزيع (La moyenne arithmétique d'une distribution)

المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة في جدول تكراري على شكل فئات محددة لكل فئة تكرارها (n_i) هو عبارة عن مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة (c_i) في تكرارها مقسوما على مجموع التكرارات.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i ci}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \ldots (3)$$

حيث c_i هي مركز الفئة

K عدد الفئات

نلاحظ أن العلاقة رقم 2 والعلاقة رقم 3 متشابهتين وعلى هذا الأساس يعتبر المتوسط الحسابي المرجح نفسه المتوسط الحسابي للتوزيع. هذا الأخير فقط يأخذ مركز الفئة (c_i) بدلا من القيم الأخرى. كذلك نلاحظ أن في العلاقة رقم 1 يأخذ جميع القيم أو الوحدات الإحصائية (N) في حين العلاقة 2 و3 تأخذ K قيمة أو فئة.

مثال 2: نأخذ السلسلة الإحصائية التالية: S : 8,13,5,8,5,9,13,25,13,9,35,44,54,28

نفترض أننا جمعنا البيانات في 3 فئات كما هو موضح في الجدول التالي:

✓ حساب المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري (توزيع تكراري غير منتظم –طول الفئات غير متساوي–)

الفئات	n_i	c_i	$n_i.c_i$
[5 13[	6	9	54
[13 28[	4	20.5	82
[28 54]	4	41	164

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{3} ciX_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{300}{14} = 21.43$$

✓ حساب المتوسط الحسابي المرجح

$$\bar{X}=\frac{(5\times 2)+(8\times 2)+(9\times 2)+(13\times 3)+25+28+35+44+54}{14}=\frac{269}{14}=19.21$$

نلاحظ أن قيمة المتوسط الحسابي غير متساوية، على هذا الأساس حساب المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري بالاعتماد على مركز الفئات يعطي نتائج غير دقيقة (un résultat imprécis) مقارنة مع المتوسط الحقيقي، وعلى هذا الأساس نكون أمام هامش خطأ كبير والذي يحسب كما يلي:

$$\frac{21.43-19.21}{19.21}\times 100=11.55\%$$

طبعا هامش الخطأ مرتبط بتعريف الفئات من خلال الطول والعدد المستعمل في التوزيع.

4.1 بعض خواص المتوسط الحسابي

✓ المجموع الجبري لفروقات القيم عن متوسطها الحسابي يكون دائما معدوما؛ أي

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})=0$$

✓ إذا أضيف مقدار ثابت (c)إلى كل قيمة من القيم فإن المتوسط الحسابي الجديد ($\bar{Y}$) يساوي المتوسط الحسابي للقيم الأصلية($\bar{X}$) مضاف إليه المقدار الثابت؛ أي: $\bar{Y}=\bar{X}+c$

✓ كذلك في حالة الضرب نجد أن: $\bar{Y}=\bar{X}\times c$

✓ المتوسط الحسابي لمقدار ثابت يساوي الثابت نفسه؛ أي : $\bar{X}=\frac{c+c+c+..........+c}{N}=\frac{Nc}{N}=c$

5.1.مزايا وعيوب المتوسط الحسابي

1.5.1.المزايا:

✓ مقياس سهل حسابه.

✓ يأخد في الاعتبار جميع القيم محل الدراسة.

2.5.1.العيوب:

✓ يتأثر بالقيم الشادة.

✓ يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

✓ لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية.

2. المتوسط الهندسي (La moyenne géométrique)

المتوسط الهندسي لمجموعة من القيم هو الجدر النوني لجداءات تلك القيم. في غالب الأحيان يتم حسابه باستخدام اللوغاريتم العشري.

$$G = \sqrt[N]{X_1 . X_2 . X3 . \ldots\ldots X_n}$$

$$\log G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \log X_i$$

طبعا يمثل هذا المتوسط الهندسي البسيط، نفس الشيء يمكن حساب المتوسط الهندسي المرجح (للتوزيع) من خلال اعتماد التكرارات (n_i) ومركز الفئة (x_i , C_i).

$$\log G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i \log X_i$$

ومن أهم الخصائص نجد:

- ✓ المتوسط الهندسي أكثر تمثيلا من باقي المتوسطات عند التعامل مع توزيعات تكرارية شديدة الالتواء نحو اليمين.
- ✓ لا يمكن حسابه إلا إذا كان مجموع القيم موجبة. وكذلك لا يمكن حسابه في التوزيعات التكرارية المفتوحة.
- ✓ محدودية تطبيقاته فأكثر استعمالاته تنحصر في حساب معدلات النمو والأرقام القياسية ومعدلات الفائدة.

3.المتوسط التربيعي (La Moyenne Quadratique)

المتوسط التربيعي لمجموعة من القيم هو الجدر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{N}}$$

كما يمكن حساب المتوسط التربيعي المرجح كما يلي:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i^2}{N}}$$

4.المتوسط التوافقي (La moyenne harmonique)

المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب تلك القيم.

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

كما يمكن حساب المتوسط التربيعي المرجح كما يلي: $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{X_i}}$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي، التربيعي والتوافقي للقيم التالية: 3.5.6.6.7.10.12

نقوم بوضع الجدول التالي:

x_i	3	5	6	6	7	10	12	$\sum$
$\log x_i$	0.477	0.699	0.778	0.778	0.845	1	1.079	5.656
X_i^2	9	25	36	36	49	100	144	399
$\frac{1}{x_i}$	0.333	0.2	0.166	0.166	0.142	0.10	0.083	1.1928

✓ حساب **G**

$G = \sqrt[7]{3.5.6.6.7.10.12} = 6.42$ / $\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \log X_i = = \frac{1}{7}(5.656) = 0.808$

$$G = 10^{0.808} = 6.42$$

✓ حساب **Q**

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{399}{7}} = 7.55$$

✓ حساب **H**

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{X_i}}=\frac{7}{1.1928}=5.86$$

5.الوسيط (La médiane)

هو القيمة التي تقع في وسط أو منتصف السلسلة الإحصائية[1]، وذلك بعد ترتيب السلسة تصاعديا أو تنازليا؛ بمعنى أن الوسيط هو القيمة التي تكون عدد القيم الأصغر منها يساوي عدد القيم الأكبر منها.

1.5.الوسيط في حالة البيانات غير المبوبة: لحساب الوسيط في حالة السلسلة الإحصائية نقوم بما يلي:

- ✓ ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا "Par ordre croissant"
- ✓ إذا كان عدد البيانات (N) فرديا (Impair) فإن الوسيط هو القيمة رقم ($\frac{n+1}{2}$)؛ أي

$$Me=Valeur(\frac{n+1}{2})$$

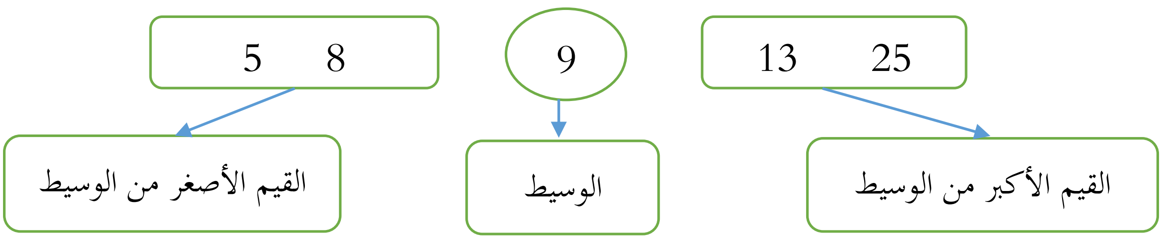
- ✓ إذا كان عدد البيانات (N) زوجي (Pair)فإن الوسيط هو القيمة رقم ($\frac{n}{2}$) والقيمة ($\frac{n}{2}+1$) ؛ أي

$$Me=\frac{Valeur(\frac{n}{2})+Valeur(\frac{n}{2}+1)}{2}=\frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}}+X_{\frac{n}{2}+1})$$

مثال: أوجد الوسيط للبيانات التالية: 5، 8، 25، 13، 9.

- ✓ ترتيب السلسلة تصاعديا: 5،8،**9**،13،25.
- ✓ لدينا (N=5) عدد فردي، إذن الوسيط هو القيمة رقم ($\frac{n+1}{2}$)؛ أي القيم رقم (3). ومنه الوسيط هو 9؛ أي

$$Me=Valeur(\frac{5+1}{2})=valeur(3)=9$$



[1] Le mot « médiane » a pour origine le latin « médius», mot signifiant « qui est au milieu ».

2.5.الوسيط في حالة البيانات المبوبة على شكل قيم

لحساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة على شكل قيم نقدم المثال التالي:

مثال: ليكن لديك الجدول التكراري التالي:

x_i	n_i	$N_i \nearrow$	$f_i\%$	$F\% \nearrow$
2	2	2	6.667	6.667
8	3	5	10	16.7
9	4	9	13.33	30
10	4	13	13.33	43.3
11	5	**18**	16.667	**60**
12	3	21	10	70
13	6	27	20	90
15	1	28	3.33	93.33
18	2	30	6.6687	100
$\sum$	30	-	100	-

- ✓ حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- ✓ نحسب رتبة الوسيط $(R_{Me}=(\frac{n}{2})=15)$

كما يمكن حسابها $(R_{Me}=(\frac{100}{2})=50\%)$ ، في مثالنا هذا لا توجد قيمة لـ $F\%\uparrow$. تساوي 50%

50%

نفس الشيء بالنسبة $N_i\uparrow$ فالقيمة المباشرة لـ 15 من الجدول هي 18.

من الجدول نجد أن Me=11 ، لكن نلاحظ أن الوسيط لا يقسم السلسلة إلى قسمين متساويين:

- ✓ فهناك 13 قيمة أصغر من القيمة 11؛ أي ما يعادل 43.3%.
- ✓ 12 قيمة أكبر من القيمة 11 ما يعدل 40%.
- ✓ 5 قيم تساوي 11 ما يعادل 16.6%.

- كما يمكن تحديد الوسيط من خلال الطريقة التالية:
- ✓ نحسب رتبة الوسيط كما يلي: $R_{Me}=(\frac{n+1}{2})=15.5$
- ✓ نلاحظ أن الوسيط محصور بين: $15 \prec 15.5 \prec 16$
- ✓ على هذا الأساس الوسيط هو متوسط القيمة رقم 15 والقيمة رقم 16، حيث من الجدول نلاحظ التكرار الصاعد 18 يتضمن كل من القيمة 15 والقيمة 16 وبالتالي الوسيط هو 11؛ أي:

$$Me=\frac{Valeur(15)+Valeur(16)}{2}=\frac{1}{2}(11+11)=11$$

3.5.الوسيط في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات

لتحديد الوسيط في حالة البيانات المبوبة على شكل فئات-تكرار نتبع الطريقة التالية:

- تحديد الفئة الوسيطية (الفئة التي يقع فيها الوسيط) وذلك بـ:

✓ تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد($N_i\uparrow$).

✓ تحديد رتبة الوسيط من خلال : $R_{Me}=(\frac{N}{2})$

.

✓ تطبيق العلاقة التالية:

$$Me=B_{\inf}+\left(\frac{\frac{n}{2}-N_i\uparrow(X_{i-1})}{n_{me}}\right).L$$

$B_{\inf}$: الحد الأدنى للفئة الوسيطية

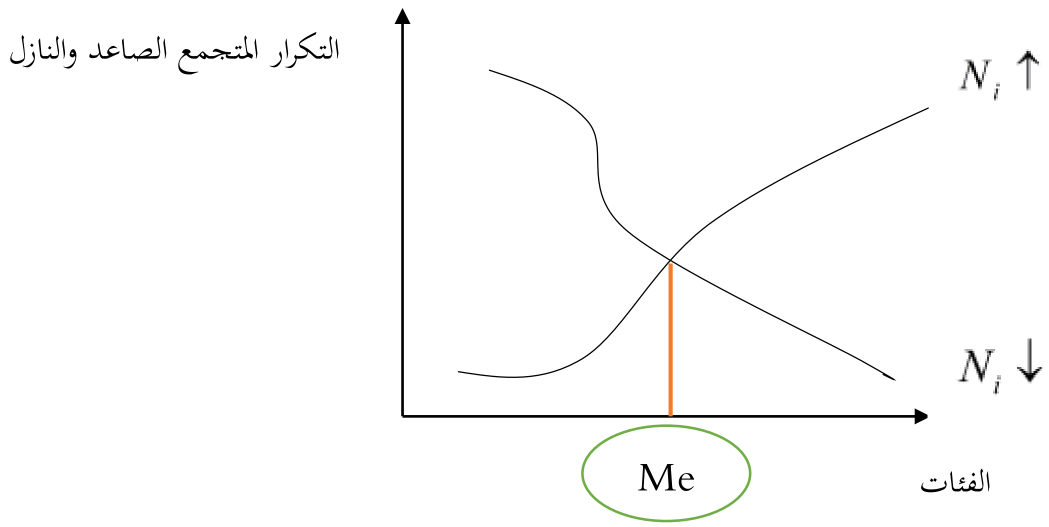
$N_i\uparrow(X_{i-1})$: التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية.

n_{me} : تكرار الفئة الوسيطية. L : طول الفئة الوسيطية.

4.5.الوسيط بيانيا

يمكن تحديد الوسيط بيانيا من خلال رسم المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل على نفس المعلم البياني، نقطة الاسقاط العمودي للتقاطع بينهما مع محور الفواصل تحدد قيمة الوسيط.

الشكل 3- 1: الوسيط بيانيا



5.5.مميزات الوسيط

✓ لا يتأثر بالقيم الشادة، وبالتالي استخدامه في حالة وجود قيم شاذة كأحسن مقياس للنزعة المركزية (أحسن من المتوسط الحسابي).

- ✓ يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.
- ✓ يمكن إيجاده في حالة البيانات الوصفية الترتيبية (بعض الحالات).
- ✓ لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
- ✓ لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية الاسمية.

6. المنوال (Le Mode)

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا أو شيوعا في السلسلة الإحصائية.[1]

1.6. المنوال في حالة غير المبوبة: المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا.

مثال1: حدد المنوال للسلسلة التالية: 8.8.8.7.4.4.4.4.4.5.5.5.5.6

القيمة الأكثر تكرارا هي 4؛ أي Mo=4

2.6.المنوال في حالة البيانات المبوبة: في هذه الحالة نستعمل طريقة الفروقات والتي تعرف بطريقة بيرسون.

1.2.6.لما يكون طول الفئات متساوي: نستعمل العلاقة التالية:

$$Mo = B_{\inf} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right).L$$

حيث أن:

$B_{\inf}$: الحد الأدنى للفئة المنوالية. L : طول الفئة .

d_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

d_2 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها

[1] **Le mode** d'une série est la valeur **la plus fréquente** de cette série.

مثال2: ليكن لديك التوزيع التكراري التالي، يطلب منك حساب الوسيط والمنوال.

الفئات	n_i	$N_i \downarrow$
0 5	2	2
5 10	7	9
10 15	18	27
15 20	3	30
$\sum$	30	-

أولا، حساب الوسيط. نقوم بحساب التكرار التجميعي الصاعد

($N_i \downarrow$) ثم نحدد الفئة الوسيطية ($R_{Me}= (\frac{30}{2}) = 15$)

إذن الفئة الوسيطية هي [10 15[

$$Me = B_{\inf} + \left(\frac{\frac{n}{2} - N(X_{i-1})}{n_{me}} \right).L = 10 + \frac{15-9}{18}.5 = 11.66$$

ثانيا، حساب المنوال. طبعا نلاحظ أن طول الفئات متساوي

كما أن الفئة الأكثر تكرار هي [10 15[؛ أي $Mo \in [10\ 15[$

$$Mo = B_{\inf} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right).L = 10 + \frac{(18-7)}{(18-7)+(18-3)}.5 = 12.11$$

2.2.6.لما يكون طول الفئات غير متساوي: في هذه الحالة لابد من تعديل التكرارات (n_i) وبالتالي حساب التكرارات الجديدة المعدلة (h)، وذلك من خلال العلاقة التالية: التكرار المعدل[1] (h) = $\frac{ni}{L}$

مثال 3: ليكن لديك التوزيع التكراري التالي.

نلاحظ أن طول الفئات غير متساوي؛ أي التوزيع غير منتظم وبالتالي لحساب المنوال لابد من حساب (h)؛ أي

$$h_i = \frac{ni}{L}$$

الفئات	n_i	f_i	L_i	h_i	$h_i(\%)$
[0 10[	9	0.3	10	0.9	0.03
[10 12[	9	0.3	2	4.5	0.15
[12 20]	12	0.4	8	1.5	0.05
$\sum$	30	1	-	-	-

نلاحظ أن الفئة المنوالية هي: $Mo \in [10,12[$

$$Mo = B_{\inf} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right).L$$

$$\Rightarrow Mo = 10 + \frac{(4.5-0.9)}{(4.5-0.9)+(4.5-1.5)}.2 = 11.09$$

[1] Effectifs /amplitudes

ملاحظة: يمكن حساب التكرار المعدل من خلال التكرار النسبي كما يلي[1]: $h_i = \frac{fi}{L}$

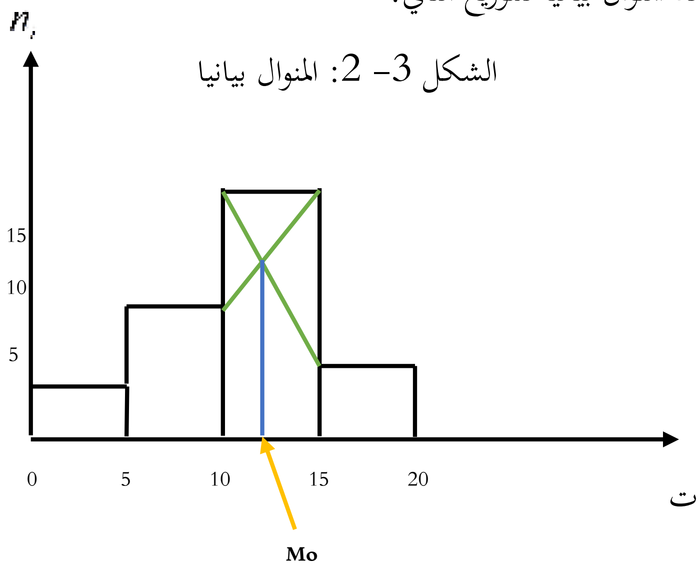
3.6.المنوال بيانيا

يحدد المنوال بيانيا من المدرج التكراري وذلك باستعمال الفئة المنوالية والفئة السابقة والفئة اللاحقة، بحيث يرسم خط يربط الحد الأعلى للفئة المنوالية بالحد الأعلى للفئة السابقة وخط يربط الحد الأدنى للفئة اللاحقة.

الفئات	n_i
0 5	2
5 10	7
10 15	18
15 20	3
$\sum$	30

مثال4: أوجد المنوال بيانيا للتوزيع التالي.

الشكل 3- 2: المنوال بيانيا



ملاحظة هامة: إذا كان التوزيع التكراري غير منتظم وجب تعديل التكرارات؛ أي حساب $h_i = \frac{fi}{L}$ ثم رسم المدرج التكراري باستعمال هذه التكرارات الجديدة.

4.6 .خصائص المنوال

- ✓ قد يتعدد المنوال في السلسلة الإحصائية والتوزيع التكراري. فقد يوجد منوالين(bimodale) أو أكثر.[2]
- ✓ قد لا يوجد المنوال أصلا.[3]
- ✓ يمكن تحديد المنوال للبيانات الوصفية.

---

[1] Fréquences/amplitudes

[2] قد تكون السلاسل متعددة المنوال (séries multimodales)

[3] Le mode n'existe pas forcément

7.مثال تطبيقي 2

أحسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات الخاصة بطول طلبة المركز الجامعي (المثال التطبيقي الأول)، وذلك قبل التبويب وبعد التبويب.

السلسلة الإحصائية موضحة في الجدول التالي:

140	149	150	150	151	152	152
153	153	153	154	155	155	156
156	157	157	158	158	158	158
158	158	158	158	159	159	159
160	160	160	162	162	162	162
162	162	163	163	163	164	164
164	164	165	165	166	171	171
174						

1.7.حساب المتوسط الحسابي:

حساب المتوسط الحسابي للسلسلة

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{N} = \frac{140+149+150+............+174}{50} = \frac{7943}{50} = 158.86$$

حساب المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة

Classes	x_i	n_i	$n_i\ x_i$	$N_i \uparrow$
140-145	142.5	1	142.5	1
145-150	147.5	1	147.5	2
150-155	152.5	9	1372.5	11
155-160	157.5	17	2677.5	28
160-165	162.5	16	2600	44
165-170	167.5	3	502.5	47
170-175	172.5	3	517.5	50
$\sum$	-	50	7960	-

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} niX_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{7} niX_i}{N} = \frac{7960}{50} = 159.2cm$$

ملاحظة هامة: نلاحظ أن المتوسط الحسابي في حالة السلسلة لا يساوي تماما المتوسط الحسابي بعد عملية تبويب البيانات، وذلك أن اعتماد مركز الفئات يعطي نتائج غير دقيقة (un résultat imprécis) مقارنة مع المتوسط الحقيقي في حالة السلسلة.

2.7.حساب الوسيط:

الوسيط في حالة السلسلة

بعد ترتيب السلسلة تصاعديا، نلاحظ أن عدد الطلبة (N) يساوي 50 وهو عدد زوجي؛ أي

N=50 (Pair) $\Longrightarrow$ $Me = \dfrac{Valeur(\frac{n}{2}) + Valeur(\frac{n}{2}+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}) = \dfrac{1}{2}(X_{25} + X_{26})$

$$Me = \frac{1}{2}(158+159) = 158.5cm$$

الوسيط في حالة التوزيع التكراري

✓ نحسب $N_i \uparrow$ ثم نحدد رتبة الوسيط: $R_{Me} = (\frac{N}{2}) = 25$

✓ إذن الفئة الوسيطية: $Me \in [155,160[$

$$Me = B_{\inf} + \left(\frac{\frac{n}{2} - N_i \uparrow (X_{i-1})}{n_{me}} \right).L = 155 + \frac{25-11}{17} \times 5$$

$$Me = 159.11cm$$

3.7.حساب المنوال:

المنوال في حالة السلسلة: هو القيمة الأكثر تكرارا؛ أي Mo=158

المنوال في حالة التوزيع التكراري: نلاحظ أن الفئة الأكثر تكرارا هي: $Mo \in [155,160[$

$$Mo = B_{\inf} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right).L = 155 + \frac{(17-9)}{(17-9)+(17-16)}.5 = 159.44cm$$