Centre universitaire Abdalhafid Boussouf-Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques 2020-2021   Matière *: Analyse 03*

TD N^0 : 1 (Séries Numériques)

Exercice n°1

Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ (on rappelle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$)   3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{2^n},\ x\in\mathbb{R}.$

Exercice n°2

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin(\frac{1}{n})$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan(\frac{1}{n^2})$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}+\alpha^n+1}$ $(\alpha\geq 0)$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$, a et $b\in\mathbb{R}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2+2}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times ...\times(2n)}$

Exercice n°3

1) Montrer que la série numérique de terme général :$u_n=\dfrac{\exp(inx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$ est convergente pour tout $x\neq 2k\pi$.

2) Etudier selon la valeur de θ, la convergence absolue de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}\theta^n\ ,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Exercice n°4

On considère la série numérique de terme général :

$$u_n=\frac{\sin n}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Montrer que :

1) Si $\alpha>1$, la série est absolument convergente.

2) Si $0<\alpha\leq 1$, la série est semi-convergente.

3) Si $\alpha\leq 0$, la série est divergente.

Res. de la matière : S. Kaouache