Chapitre 02

Rappel sur la théorie des probabilités

3.1 Expérience aléatoire et événement

3.1.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire (e.a) est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard.

Exemple 3.1. Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire qui conduit à deux résultats possibles : Face (F) ou Pile (P).

Définition 3.1. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une e.a. est appelé **ensemble fondamental** et on le note généralement Ω.

Exemple 3.2. Lorsqu'on jette un dé (à six faces numérotées), si on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.1.2 Événement

Un événement de Ω est un sous ensemble de Ω. Un événement peut être élémentaire (un seul élément) ou composé (plusieurs éléments).

Exemple 3.3. Lorsqu'on jette un dé à six faces numérotées $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'événement A **:** "avoir le chiffre 2", est un événement élémentaire $A = \{2\} \subset \Omega$.
l'événement B **:** "avoir un chiffre pair", est un événement composé $B = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

3.2 Relations et opérations entre les événements

3.2.1 Inclusion

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire. On dira que A est inclu dans B (ou A implique B), si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B. On le note $A \subset B$ (ou $A \Rightarrow B$).

Exemple 3.4. Dans l'exemple précédent (exemple 3.3) $A = \{2\} \subset B = \{2, 4, 6\}$, si A est réalisé alors B est réalisé.

3.2.2 Événement contraire

On appelle événement contraire de l'événement A le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, l'événement réalisé lorsque A n'est pas réalisé et vice versa.

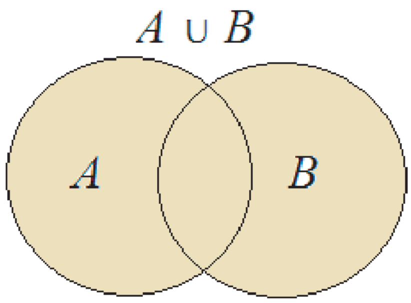
Remarque 3.1. Soit A un événement de Ω et $\overline{A}$ son événement contraire.

1. Si A est réalisé alors $\overline{A}$ n'est pas réalisé.
2. Si A n'est pas réalisé alors $\overline{A}$ est réalisé.
3. L'ensemble fondamental Ω est toujours réalisé, on l'appelle **événement certain**. Son événement contraire est **l'événement impossible**, noté $\emptyset$.

Exemple 3.5. Si on prend l'événement B dans l'exemple précédent, "avoir un chiffre pair" $B = \{2, 4, 6\}$; alors son événement contraire $\overline{B}$ est "avoir un chiffre impair" $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$.

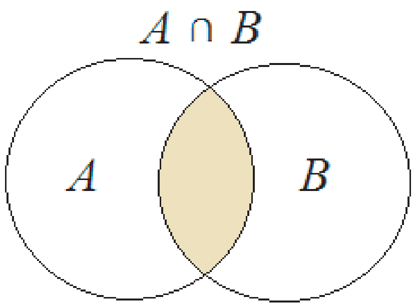
3.2.3 Union (Disjonction)

On dit que l'événement "A ou B", noté $(A \cup B)$, est réalisé si l'un au moins des deux événements est réalisé (i.e. A est réalisé **ou** B est réalisé).



3.2.4 Intersection (Conjonction)

L'événement "A et B", noté $(A \cap B)$, est réalisé lorsque A est réalisé **et** B est réalisé



3.2.5 Événements incompatibles (disjoints)

Les événements A et B sont dits incompatibles si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre. Autrement dit, si l'un est réalisé l'autre ne se réalisera pas (deux événements qui ne peuvent se réaliser à la fois) :

$$A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exemple 3.6. B et $\overline{B}$ sont incompatibles.

3.2.6 Système complet d'événements

Soient Ω l'ensemble fondamentale associé à une expérience aléatoire et A_1, A_2,..., A_n des événements de Ω. Les événements A_1, A_2,..., A_n forment un système complet d'événements, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les A_i sont réalisables $(A_i \neq \emptyset)$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.
2. Les A_i sont incompatibles 2 à 2 : $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$.
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Exemple 3.7. Dans le jet d'un dé (une fois), on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les événements $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$ et $A_6 = \{6\}$ forment un système complet d'événements.

3.3 Définition axiomatique de la probabilité

Soient deux événements A et B dans Ω.

1. La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq p(A) \leq 1.$$

2. La probabilité de l'événement certain Ω est égale à 1 et la probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ est 0 :
$$p(\Omega) = 1 \text{ et } p(\emptyset) = 0.$$

3. Soient A et B deux événements incompatibles, $(A \cap B = \emptyset)$, alors
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

4. Si $A \subseteq B$, alors $p(A) \leq p(B)$.

5. **Généralisation à n événements** : Soient A_1, A_2,..., A_n des événements incompatibles 2 à 2. Alors
$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n), \text{ i.e. } p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i).$$

Conséquence. Soit A un événement et $\overline{A}$ son contraire, alors
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

En effet,
$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} = \Omega, \text{ donc } p(A \cup \overline{A}) = p(\Omega) \quad &\Leftrightarrow \quad p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A). \end{aligned}$$

Remarque 3.2. Tout calcul conduisant à des valeurs de probabilités négatives ou supérieures à 1 est faux.

Exemple 3.8. Reprenons l'exemple du jet d'un dé à 6 faces équilibrées, où
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

avec les événements :
$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\},\ A_4 = \{4\},\ A_5 = \{5\} \text{ et } A_6 = \{6\}.$$

Les événements $A_i, i = 1, 2, ..., 6$ sont tous incompatibles et $p(A_i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i = \overline{1, 6}$.
$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$.

3.4 Définition classique des probabilités

A chaque événement A d'une expérience aléatoire (e.a.) est associé un nombre que l'on note $p(A)$ compris entre 0 et 1 qui mesure la probabilité de la réalisation de A. Si une e.a. a N cas possibles et parmi ces N cas, il y a n cas favorables à la réalisation de l'événement A, on définit la probabilité de la réalisation de A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

D'une manière équivalente

$$p(A) = \frac{n}{N}.$$

Exemple 3.9. Dans le jet d'un dé à six faces équilibrées, soit A l'événement "avoir un nombre pair".
Nombre de cas possibles est 6 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nombre de cas favorables est 3 : $A = \{2, 4, 6\}$.

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6}.$$

Théorème 3.1. *Soient A et B deux événements de l'espace fondamental Ω, alors :*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 3.10. Dans le jet du dé à 6 faces équilibrées, considérons les événements :

A : "avoir un nombre pair" ;
B : "avoir un multiple de 3".

On a

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\} \text{ et } A \cap B = \{6\},$$

alors

$$p(A) = \frac{3}{6}, p(B) = \frac{2}{6} \text{ et } p(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

D'où

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

En effet,

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{4}{6}.$$

3.5 Probabilités conditionnelles

Considérons le jet de deux dés parfaits et soit A l'événement : "la somme des points obtenus est au moins égale à 10".
Les cas qui donnent au moins 10 sont

$$A = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5)\}, \text{ et } p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

1. Supposons que le premier dé nous donne le chiffre 3 (événement B : "obtenir le chiffre 3 sur la surface supérieure du premier dé"). Alors, l'événement A est devenu irréalisable (A et B incompatibles). Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle, et nous écrivons $p(A/B) = 0$.
2. Supposons maintenant que le premier dé amène un 6 (événement C). Pour atteindre ou dépasser 10, il faut avoir sur la face supérieure du second dé : 4, 5, ou 6. On aura 3 chance sur 6 et $p(A/B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Définition 3.2. Soient A et B deux événements, tels que $p(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est donnée par la formule :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Exemple 3.11. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire une boule, on la garde, puis on tire une autre.

(i) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage ?

(ii) Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges au cours des deux tirages (une boule rouge dans chaque tirage) ?

Solution

Posons les événements suivants :
A_1 : "avoir une boule rouge au premier tirage".
A_2 : "avoir une boule rouge au deuxième tirage".
$A_1 \cap A_2$: "avoir une boule rouge dans chaque tirage (deux boules rouges)".

(i) On a

$$p(A_1) = \frac{2}{5}$$

et la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage, sachant que on a tiré une boule rouge au premier tirage est :

$$p(A_2/A_1) = \frac{1}{4}.$$

(ii) Par définition

$$p(A_2/A_1) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_1)},$$

alors

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

3.6 Formule des probabilités composées

Pour tout événement A et B tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, on a :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ alors } p(A \cap B) = p(A/B)p(B);$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ alors } p(A \cap B) = p(B/A)p(A).$$

Des deux formules énoncées, on déduit

$$p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).$$

Exemple 3.12. Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire deux boules successivement et sans remise.
Quelle est la probabilité pour que la première boule soit noire et que la deuxième soit blanche ?

Solution

Posons les événements suivants :
A : "tirer une boule noire au premier tirage".
B : "tirer une boule blanche au deuxième tirage".
On a

$$p(A) = \frac{2}{5} \text{ et } p(B/A) = \frac{3}{4},$$

d'où

$$p(A \cap B) = p(B/A)p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}.$$

3.7 Événements indépendants

Deux événements A et B sont dit indépendants si la réalisation ou la non réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation ou la non réalisation de l'autre. A et B sont indépendants si

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Conclusion

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A).$$

Exemple 3.13. Dans le jet d'un dé à six faces numérotées, considérons les événements :
A : "avoir un nombre pair".
B : "avoir un multiple de 3".
On a donc $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$.
Alors $p(A) = \frac{3}{6}$, $p(B) = \frac{2}{6}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
On a aussi, $p(A) \times p(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire A et B sont indépendants.

3.8 Formule des probabilités totales

Soient $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ une famille d'événements constituant un système complet d'événements de Ω, c'est-à-dire :

$$A_i \neq \emptyset, \forall i = \overline{1, n}; \; A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Soit B un événement quelconque de Ω, alors

$$p(B) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n),$$

identiquement équivalent à

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i)p(A_i).$$

Exemple 3.14. Trois machines A, B et C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total de comprimés fabriquées par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement 5%, 6% et 3% de comprimés défectueux.
Quelle est la probabilité qu'un comprimé pris au hasard, soit défectueux ?

Solution

Posons les événements suivants :
A : "le comprimé provient de la machine A" ;
B : "le comprimé provient de la machine B" ;
C : "le comprimé provient de la machine C" ;
D : "le comprimé est défectueux".

On a

$$p(A) = 0.4,\ p(B) = 0.35,\ p(C) = 0.25,$$

$$p(D/A) = 0.05,\ p(D/B) = 0.06,\ p(D/C) = 0.03.$$

A, B et C forment un système complet d'événements, alors la probabilité qu'un comprimé pris au hasard soit défectueux (en utilisant la formule des probabilités totales) est :

$$p(D) = p(D/A)p(A) + p(D/B)p(B) + p(D/C)p(C)$$

$$p(D) == (0.05 \times 0.4) + (0.06 \times 0.35) + (0.03 \times 0.25) = 0.0485.$$

On peut construire le diagramme en arbre (l'arborescence) des événements, avec l'événement $N = \overline{D}$: "le comprimé n'est défectueux" (voir figure 3.1).

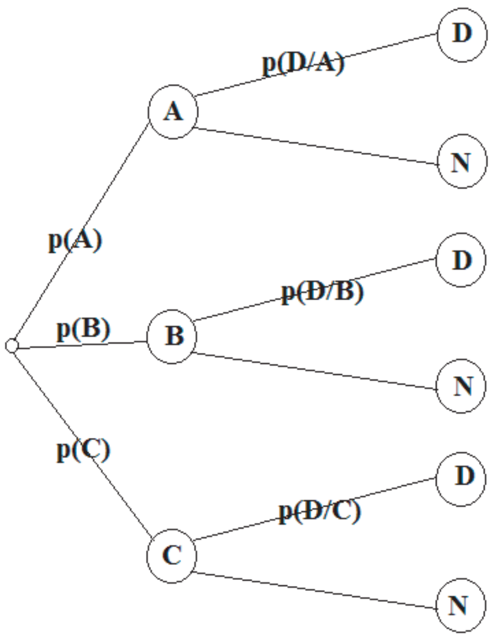


FIGURE 3.1 – Arborescence des événements.

3.9 Théorème de Bayes

Dans la formule des probabilités totales, on s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement quelconque B, qui est donnée par

$$p(B) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n). \tag{3.1}$$

Par contre, pour i donné, la probabilité conditionnelle de A_i sachant que l'événement B est réalisé est définie par

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}.$$

En utilisant la formule (3.1) et en remplaçant $p(A_i \cap B)$ par $p(A_i \cap B) = p(B/A_i)p(A_i)$, on aura le théorème suivant :

Théorème 3.2. ***Théorème de Bayes***
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements et B un événement quelconque. Pour tout i, $i \in \{1, 2, ..., n$, on a :

$$p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i)p(A_i))}{p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) + ... + p(B/A_n)p(A_n)}.$$

Exemple 3.15. Dans l'exemple des comprimés défectueux on prend un comprimé défectueux. Quelle est la probabilité que ce défectueux provient de la machine A ?

Solution

$$p(A/D) = \frac{p(D/A)p(A)}{p(D)} = \frac{0.05 \times 0.4}{0.0485} = 0.41.$$