$t \in I$, on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (Z+Y_p)'(t) = Z'(t) + Y_p'(t) = (A(t)Z(t)) + (A(t)Y_p(t) + B(t)) \\ &= A(t)(Z(t)+Y_p(t)) + B(t) = A(t)Y(t) + B(t). \end{aligned}$$

C'est à dire $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$. Donc, $Y := Y - Y_p$ est une solution de (E). Ainsi, $Y \in S_E$.

C'est à dire, on démontré que

$$\forall Y : Y \in S_H + Y_p \Longrightarrow Y \in S_E.$$

Ceci implique que $S_H + Y_p \subset S_E$.

2.3 La résolvante du système homogène (H)

On a vu que, pour tout $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, le système $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$ admet une solution unique. Notons cette solution par $Y(., t_0, Y_0)$. On peut remarquer que $Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0$.

Lemme 2.3.1 *Soient $t, t_0 \in I$. Considérons la fonction f_{t,t_0} définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ par $f_{t,t_0}(Y_0) = Y(t, t_0, Y_0)$. L'application f_{t,t_0} est linéaire.*

Preuve 18 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}^n$. On a $f_{t,t_0}(\alpha Y_0 + \beta Z_0) = Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0)$. D'autre part, on considère la fonction définie sur I par $G(t) = \alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)$. On a*

$$\begin{aligned} G'(t) &= (\alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0))' = \alpha Y'(t, t_0, Y_0) + \beta Y'(t, t_0, Z_0) \\ &= \alpha A(t) Y(t, t_0, Y_0) + \beta A(t) Y(t, t_0, Z_0) = A(t)(\alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)) \\ &= A(t) G(t). \end{aligned}$$

et $G(t_0) = \alpha Y(t_0, t_0, Y_0) + \beta Y(t_0, t_0, Z_0) = \alpha Y_0 + \beta Z_0$. *Ce qui implique que* G *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = \alpha Y_0 + \beta Z. \end{cases}$ *De l'unicité de la solution, on trouve que* $Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0) = G(t)$. *C'est à dire,* $Y(t, t_0, \alpha Y_0 + \beta Z_0) = \alpha Y(t, t_0, Y_0) + \beta Y(t, t_0, Z_0)$. *Ainsi,* $f_{t,t_0}(\alpha Y_0 + \beta Z_0) = \alpha f_{t,t_0}(Y_0) + \beta f_{t,t_0}(Z_0)$.

Définition 2.3.1 *La matrice associée à* f_{t,t_0} *est appellée la matrice résolvante de* (H) *(où brièvement la résolvante). On la note par* $R(t, t_0)$.

Théorème 2.3.1 *On a*

1. $\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall t, t_0 \in I : R(t, t_0) Y_0 = Y(t, t_0, Y_0)$.
3. $\forall t_0 \in I : R(t_0, t_0) = I_n$. *Ici,* I_n *représente la matrice identité.*
4. $\forall t, s, r \in I : R(t, s) R(s, r) = R(t, r)$.
5. $\forall t, s \in I : R(t, s)$ *est inversible et on a* $(R(t, s))^{-1} = R(s, t)$.
6. $\forall t, t_0 \in I : \frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) R(t, t_0)$.
7. $\forall t, t_0 \in I : \frac{d}{dt} R(t_0, t) = -R(t_0, t) A(t)$.

Preuve 19

1. *De la définition de la matrice associée à une application.*
2. *Soient* $t, t_0 \in I$. *On a* $R(t, t_0) Y_0 = f_{t,t_0}(Y_0) = Y(t, t_0, Y_0)$, *d'où le résultat.*
3. *Soit* $t_0 \in I$. *Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. *On a* $R(t_0, t_0) Y_0 = Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0 = I_n Y_0$. *C'est à dire, on a montré que*

$$\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n : R(t_0, t_0) Y_0 = I_n Y_0.$$

   D'aprés la propriété algébrique (voir exercice 2), on trouve $R(t_0, t_0) = I_n$.

4. *Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. *Soient* $r, s \in I$. *On pose* $Y_1 = R(s, r) Y_0$ *et on définit deux fonctions* f *et* g *comme suit* $f(t) = R(t, s) R(s, r) Y_0$ *et* $g(t) = R(t, r) Y_0$ *pour tout* $t \in I$.

On a $f(t) = R(t,s)\,Y_1 = Y(t,s,Y_1)$ *est une solution de* $\begin{cases} Y' = A(t)\,Y, \\ Y(s) = Y_1. \end{cases}$ *D'autre part,* g *est aussi une solution de ce système (Pour tout* $t \in I$ *on a* $g^{'}(t) = A(t)\,g(t)$ *et* $g(s) = R(s,r)\,Y_0 = Y_1$*). d'aprés l'unicité de la solution, on trouve* $f = g$*. Ce qui implique, d'aprés la propriété algébrique, le résultat.*

5. *Soient* $t, s \in I$*. On a* $R(t,s)\,R(s,t) = R(t,t) = I_n$*. Ce qui implique le résultat. (Rappelons que si une matrice est inversible à droite alors elle est inversible et son inverse est égale à l'inverse à droite).*

6. *Soient* $t, t_0 \in I$*. Soit* $Y_0 \in \mathbb{R}^n$*. On a*

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)Y_0 &= \frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\,Y_0\right) = \frac{d}{dt}Y(t,t_0,Y_0) \\ &= A(t)\,Y(t,t_0,Y_0) = \left(A(t)\,R(t,t_0)\right)Y_0.\end{aligned}$$

C'est à dire $\left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)Y_0 = \left(A(t)\,R(t,t_0)\right)Y_0.$

7. *Soient* $t, t_0 \in I$*. On a* $R(t,t_0)\,R(t_0,t) = I_n$ *alors* $\frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\,R(t_0,t)\right) = 0_n$ *mais*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\,R(t_0,t)\right) &= \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)R(t_0,t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= \left(A(t)\,R(t,t_0)\right)R(t_0,t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= A(t)\,I_n + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) \\ &= A(t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right),\end{aligned}$$

alors $A(t) + R(t,t_0)\left(\frac{d}{dt}R(t_0,t)\right) = 0_n$*. Donc* $\frac{d}{dt}R(t_0,t) = -\left(R(t,t_0)\right)^{-1}A(t) = -R(t_0,t)\,A(t)$.

2.4 Le système fondamental de (H)

Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.

Définition 2.4.1 *On dit que* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H) *si*

1. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont des solutions de* (H).
2. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants. C'est à dire :*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n = 0) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0).$$

Exemple 14 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$.

1. *Montrons que* Y_1 *et* Y_2 *sont deux solutions de* $Y' = A(t)Y$: On a $Y_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(t)Y_1(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $Y_1'(t) = A(t)Y_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce qui implique que Y_1 est une solution de (H). De même, on montre que Y_2 est aussi une solution de (H).
2. *Montrons que* Y_1 *et* Y_2 *sont linéairement indépendants :* Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
(\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0) &\Longrightarrow (Y_1(t) + \beta Y_2(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}) \\
&\Longrightarrow \left(\alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} = 0, \forall t \in \mathbb{R}\right) \\
&\Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} \alpha t - \beta \\ \alpha + \beta t \end{pmatrix} = 0, \forall t \in \mathbb{R}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\begin{cases} \alpha t - \beta = 0 \\ \alpha + \beta t = 0 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$ représente une infinité d'équations de deux inconnues α et β. Mais, on sait que pour trouver les inconnues α et β il nous suffit deux équations non équivalentes. Pour cela, on prend les deux équations données par la valeur $t = 0$. Ainsi, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendants.

Théorème 2.4.1 *Soit $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ un système fondamental de (H). On a $S_H = [\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}]$. Rappellons que par définition*

$$[\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}] := \{Y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n) / Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve 20 *$\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système fondamental de (H) alors $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est un système linéairement indépendant. Puisque card $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\} = n = \dim S_H$ alors $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ est une base de S_H. Ce qui implique que $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ engendre S_H.*

Exemple 15 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ et $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$. Puisque $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de $Y' = A(t) Y$ alors*

$$\begin{aligned} S_H &= [\{Y_1, Y_2\}] = \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / \text{pour tout } t \in \mathbb{R} : Y(t) = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{Y \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) / \text{pour tout } t \in \mathbb{R} : Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *La solution générale de (H) est donnée par $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + ... + c_n Y_n$ avec $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.*

2.5 La matrice fondamentale de (H)

Définition 2.5.1 *La matrice dont ces colonnes représente un système fondamentale de (H) s'appelle la matrice fondamentale de (H). En d'autre term, on dit que M est une* *matrice fondamentale si* $M = (Y_1...Y_n)$ *avec* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H).

Exemple 16 *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$. *Puisque* $\{Y_1, Y_2\}$ *est un système fondamental de* $Y' = A(t)Y$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $M(t) = (Y_1(t)\, Y_2(t)) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. *Alors* M *est une matrice fondamentale de* $Y' = A(t)Y$.

Théorème 2.5.1 *Soit* M *une matrice fondamentale du système* (H). *Alors*

1. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a* $M'(t) = A(t)M(t)$.
2. *La solution générale de* (H) *est donnée par* $Y = MC$ *avec* $C \in \mathbb{R}^n$.

Preuve 21 M *est une matrice fondamentale du système* (H) *alors* $M = (Y_1...Y_n)$ *avec* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ *est un système fondamental de* (H).

1. *On a*

$$\begin{aligned} M'(t) &= (Y_1(t)...Y_n(t))' = \left(Y_1'(t)...Y'(t)\right) = (A(t)Y_1(t)...A(t)Y_n(t)) \\ &= A(t)(Y_1(t)...Y_n(t)) = A(t)M(t). \end{aligned}$$

2. *On a* $Y(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t) + ... + c_nY_n(t) = (Y_1(t)...Y_n(t))C$ *avec* $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

2.6 Le wronskien d'un système de solutions de (H)

Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H$.

Définition 2.6.1 *Le wronskien de* $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$, *noté* W, *est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont* $Y_1, Y_2, ...$ *et* Y_n :

$$\forall t \in I : W(t) := \det [Y_1(t) ... Y_n(t)] .$$

Théorème 2.6.1 *Soient* $Y_1, Y_2, ..., Y_n \in S_H$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall t \in I : W(t) \neq 0.$
2. $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0.$
3. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants.*

Preuve 22

1. $1 \Longrightarrow 2)$*Evident car* $(\forall t : P(t)) \Longrightarrow (\exists t_0 : P(t_0))$.
2. $2 \Longrightarrow 3)W(t_0) \neq 0$ *implique que* $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ *sont linéairement indépendants. D'aprés l'exercice 4, on trouve que* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont linéairement indépendants.*
3. $3 \Longrightarrow 1)$*Puisque* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *sont des solutions de* (H) *et qui sont linéairement indépendants alors d'aprés l'exercice 4 on trouve que* $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ *sont L. I pour tout* $t \in I$. *Ceci implique que* $W(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in I$.

2.7 La résolvante et le système non homogène

Théorème 2.7.1 *Soient* $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. *La solution du système* $(E.D.)$ *est donnée par*

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u) B(u) \, du.$$

Preuve 23 *Considérons la fonction définie sur* I *par* $Z(u) = R(t_0, u) Y(u)$. *Soit* $u \in I$.

On a

$$\begin{aligned} Z'(u) &= \frac{d}{du}\left(R(t_0,u)\,Y(u)\right) = \frac{d}{du}\left(R(t_0,u)\right)Y(u) + R(t_0,u)\,Y'(u) \\ &= \left(-R(t_0,u)\,A(u)\right)Y(u) + R(t_0,u)\left(A(t)\,Y(u) + B(u)\right) \\ &= R(t_0,u)\,B(u). \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall u \in I : Z'(u) = R(t_0,u)\,B(u).$$

Ce qui implique que

$$\forall t \in I : Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

Ainsi

$$\forall t \in I : R(t_0,t)\,Y(t) = R(t_0,t_0)\,Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

Alors

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t,t_0)\,I_n Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)\,R(t_0,u)\,B(u)\,du.$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.7.1 *Soient* $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. *La solution du système* $(H.D.)$ *est donnée par*

$$\forall t \in I : Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0.$$

Preuve 24 *Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur* $B = 0$.