وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المركز الجامعي لميلة * معهد العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير*
السنة الثانية علوم اقتصادية
مقياس: الإحصـــــــــاء (3)

سلسلة التمارين (1): توزيع الوسط الحسابي للمعاينة

التمرين (1)

مجتمع إحصائي يتكون من ثلاث مشاهدات $(N=3)$ هي (4، 6، 2)، تم اختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع $(n=2)$ مع الإرجاع.

المطلوب:1- أحسب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2)؛

2- سحب كافة العينات الممكنة بحجم $(n=2)$ مع الإرجاع؛

3- أحسب الوسط الحسابي $(\overline{X})$ لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري؛

4- أحسب متوسط المتوسطات $(\mu_{\overline{X}})$ والتباين $(\sigma^2_{\overline{X}})$؛

5- مقارنة النتائج المحسوبة في المطلوب (IV) مع النتائج المحسوبة في الفرع (I)؛

التمرين (2)

مجتمع إحصائي يتكون من ثلاث مشاهدات $(N=3)$ هي (1، 3، 2)، تم اختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع $(n=2)$ بدون إرجاع.

المطلوب: 1 - حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2)؛

2- سحب كافة العينات الممكنة بحجم $(n=2)$بدون إرجاع مع حساب الوسط الحسابي $(\overline{X})$ لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري؛

3- حساب متوسط المتوسطات $(\mu_{\overline{X}})$ والتباين $(\sigma^2_{\overline{X}})$؛

4- مقارنة النتائج المحسوبة في الفرع (III) مع الفرع (I).

حل التمرين (1)

1− حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2):

إن كل قيمة من قيم المجتمع الإحصائي لها نفس الفرصة في الظهور، وعليه يكون دالة التوزيع الإحتمالي$P(X)$ كما يلي:

$$P(X_i)=\frac{1}{3} \qquad ; \; X_i = 2, 6, 4$$

وعليه يكون:

$$\mu = E(X_i)=\sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i) = X_1P(X_1)+X_2P(X_2)+X_3P(X_3)$$

$$=2.\left(\frac{1}{3}\right)+6.\left(\frac{1}{3}\right)+4.\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}[2+6+4]=4$$

ويمكن حساب متوسط المجتمع (μ)كمايلي:

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}=\frac{2+6+4}{3}=4$$

حساب تباين المجتمع (σ^2):

$$\sigma^2 = E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i)-\mu^2=\left[2^2\left(\frac{1}{3}\right)+6^2\left(\frac{1}{3}\right)+4^2\left(\frac{1}{3}\right)\right]-(4)^2=\frac{8}{3}$$

وكذلك يمكن حساب التباين (σ^2):

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2}{N}=\frac{(2-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

2− عدد العينات الممكنة بحجم ($n=2$) مع الإرجاع:

عدد العينات: $N^n=(3)^2=9$ وذلك كما هو موضح في الجدول:

العينات	**2**	**6**	**4**
2	(2،2)	(6،2)	(4،2)
6	(2،6)	(6،6)	(4،6)
4	(2،4)	(6،4)	(4،4)

3− حساب الوسط الحسابي ($\overline{X}$) لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري:

العينات	(2،2)	(2،6)	(4،2)	(6،2)	(6،6)	(6،4)	(4،2)	(4،6)	(4،4)
$\overline{X}$	2	4	3	4	6	5	3	5	4

تلخيص نتائج الوسط الحسابي ($\overline{X}$) في جدول تكراري:

$\overline{X}$	f	$\overline{X}f_i$	$\overline{X}^2f_i$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
$\sum$	9	36	156

4- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) والتباين ($\sigma^2_{\overline{X}}$):

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}f_i}{\sum f_i} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2_{\overline{X}} = \frac{156}{9} - 4^2 = \frac{4}{3}$$

5- مقارنة النتائج المحسوبة:

- إن متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) يساوي متوسط المجتمع (μ) أي أن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 4$$

- إن تباين الوسط الحسابي ($\sigma^2_{\overline{X}}$) هو عبارة عن تباين المجتمع (σ^2) مقسوماً على حجم العينة ($n = 2$) أي أن:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{2} = \frac{4}{3}$$

وبمقارنة النتائج السابقة يمكن أن نستخلص بأن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

حل التمرين (2)

1- حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2):

إن كل قيمة من قيم المجتمع الإحصائي لها نفس الفرصة في الظهور، وعليه تكون دالة التوزيع الإحتمالي $P(X)$ كما يلي:

$$P(X_i) = \frac{1}{3} \qquad ; \; X_i = 1, 3, 2$$

وعليه يكون:

$$\mu = E(X_i) = \sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i) = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + X_3P(X_3)$$

$$= 1.\left(\frac{1}{3}\right) + 3.\left(\frac{1}{3}\right) + 2.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}[1 + 3 + 2] = 2$$

حساب تباين المجتمع (σ^2):

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i) - \mu^2 = \left[1^2\left(\frac{1}{3}\right) + 2^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3^2\left(\frac{1}{3}\right)\right] - (2)^2 = \frac{2}{3}$$

2– عدد العينات الممكنة بحجم $(n=2)$ بدون إرجاع:

يمكن سحب كافة العينات الممكنة بحجم $(n=2)$ بدون إرجاع وفقا للصيغة التالية:

$$\sum f_i = C_n^N = C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

إذن تكون كافة العينات الممكنة والبالغة (3) عينات موضحة كالآتي:

العينات	(1،3)	(1،2)	(3،2)

ومنه يمكن حساب الوسط الحسابي $(\overline{X})$ كمايلي:

العينات	(1،3)	(1،2)	(3،2)
$\overline{X}$	2	1.5	2.5

تلخيص نتائج الوسط الحسابي $(\overline{X})$ في جدول تكراري:

$\overline{X}$	f	$\overline{X}f_i$	$\overline{X}^2 f_i$
1.5	1	1.5	2.25
2.0	1	2.0	4.00
2.5	1	2.5	6.25
$\sum$	$\sum f_i = C_n^N$	6	12.5

3– حساب متوسط المتوسطات $(\mu_{\overline{X}})$ والتباين $(\sigma^2_{\overline{X}})$:

$$-\mu_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X} f_i}{\sum f_i} = \frac{6}{3} = 2$$

$$-\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2_{\overline{X}} = \frac{12.5}{3} - 2^2 = \frac{1}{6}$$

4– مقارنة النتائج المحسوبة في (3) مع (1):

عند مقارنة النتائج يتضح لنا:

– إن متوسط المتوسطات $(\mu_{\overline{X}})$ يساوي متوسط المجتمع (μ) أي أن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 4$$

– إن تباين الوسط الحسابي $(\sigma^2_{\overline{X}})$ هو عبارة عن تباين المجتمع (σ^2) مقسوماً على حجم العينة $(n=2)$ و مضروباً في المقدار $\frac{(N-n)}{N-1}$ الذي يمثل عامل التصحيح (معامل الإرجاع) في حالة كون حجم المجتمع صغير وكان السحب بدون إرجاع:

$$\sigma_{\overline{X}}^{2} = \frac{\sigma^{2}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \frac{1}{6}$$

وبمقارنة النتائج السابقة يمكن ان نستخلص ما يأتي:

$$* \ \mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$* \ \sigma_{\overline{X}}^{2} = \frac{\sigma^{2}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

انتـهى