Chapitre 2

Ensembles, relations et applications.

2.1 Ensembles

Définition 2.1.
Si $E = \{a,\ b,\ \ldots\}$ *est l'ensemble dont les éléments sont* $a, b, \ldots,$ *on dit que* E *est défini en* extension. *Si* $E = \{x,\ P(x)\}$ *est l'ensemble des* x *qui satisfont la proposition* P, *on dit que* E *est défini en* compréhension.

Définition 2.2.

1. *On note* $\emptyset$ l'ensemble vide *qui ne contient aucun élément.*
2. *Un ensemble à un élément est un* singleton.
3. *Un ensemble à deux éléments (distincts) est une* paire.
4. Le cardinal d'un ensemble E noté $card(E)$ est le nombre (fini ou infini) d'éléments de E.

Définition 2.3. (Inclusion)
On dit que l'ensemble F est contenu, est une partie, est un sous ensemble ou est inclus dans E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E. Sinon, on écrit $F \not\subset E$. L'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 2.4.
On a toujours

1. $E \subset E$ (réflexivité).
2. *Si* $F \subset E$ *et* $G \subset F$ *alors* $G \subset E$ (transitivité).
3. $(E = F) \Leftrightarrow [(E \subset F)\ et\ (F \subset E)]$ (antisymétrie)

Définition 2.5. (Complémentaire)
Si $F \subset E$, le complémentaire de F dans E est l'ensemble $C_E F$, aussi noté F^c (lorsque le rôle de E est clair), défini par

$$F^c = \{x \in E,\ x \notin F\}. \tag{2.1}$$

Proposition 2.6.
On a toujours

1. $(F^c)^c = F$.
2. $F \subset G \Leftrightarrow G^c \subset F^c$

Démonstration.

1. évident.
2. Supposons que $F \subset G$.
   Soit $x \in G^c \Rightarrow x \notin G \Rightarrow x \notin F$ (car $F \subset G$) $\Rightarrow x \in F^c$. Alors $G^c \subset F^c$.

$\square$

Définition 2.7. (Intersection)
L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cap F$ des éléments x qui sont à la fois dans E et dans F. On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ } et \text{ } x \in F\}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.8.
On a toujours

1. $E \cap F = F \cap E$ *(commutativité).*
2. $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ *(associativité).*
3. $(E \subset F \cap G) \Leftrightarrow [(E \subset F)$ *et* $(E \subset G)]$

Définition 2.9. (Union)
L'union de de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cup F$ des éléments x qui sont dans E, dans F ou dans les deux à la fois.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ } ou \text{ } x \in F\}. \tag{2.3}$$

Proposition 2.10.
On a toujours

1. $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.

2. $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$.

Démonstration.

1. Soit $x \in (F \cap G)^c \Leftrightarrow x \notin (F \cap G) \Leftrightarrow x \notin F \ \vee x \notin G \Leftrightarrow x \in F^c \ \vee x \in G^c$ $\Leftrightarrow x \in F^c \cup G^c$. Alors $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.
2. Similaire que (1).

□

Définition 2.11. (Différence)
Si E et F sont deux ensembles, la différence $E \backslash F$ entre E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F. La différence symétrique $E \triangle F$ de E et F est

$$E \triangle F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E). \tag{2.4}$$

Définition 2.12. (Partition d'un ensemble)
Une partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties de E telles que

1. $\forall i, \ A_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j \ tel \ que \ i \neq j \ on \ a, \ A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$

Définition 2.13. (Produit cartésien)
Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, \ y), \ x \in E \text{ et } y \in F\}, \tag{2.5}$$

La diagonale d'un ensemble E est

$$\triangle = \{(x, \ x), \ x \in E\} \subset E \times E. \tag{2.6}$$

2.2 Relations

Définition 2.14. (Relation)
On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correspondance $\mathcal{R}$, qui lie d'une certaine façon des éléments de A à des éléments de B.

1. On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation $\mathcal{R}$.
2. Si x est lié à y par la relation $\mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y ; ou (x, y) vérifiée la relation $\mathcal{R}$ et on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$, sinon on écrit : $x\not\mathcal{R}y$ ou $\not\mathcal{R}(x, y)$.
3. Une relation de A vers A est dite relation sur A.

Exemple 2.1.

1. *Soit E l'ensemble des enseignent de l'université de Mila, et F, l'ensemble des étudiants l'université de Mila. On détermine une relation $\mathcal{R}$ allant de E vers F en posant que*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ x\mathcal{R}\ y \Leftrightarrow\ x \text{ est l'enseigent de } y. \tag{2.7}$$

2. *Autres exemples de relations humaines : ≪ être le frère de ≫, ≪ avoir le même age que ≫.*
3. *Soit $A = B = \mathbb{Z}$, On détermine une relation $\mathcal{R}$ sur de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ en posant que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow\ \ 2|(a - b). \tag{2.8}$$

Ainsi, on a que $1\mathcal{R}7$, puisque 2 divise $-6 = (1 - 7)$. Notons que $18\not\mathcal{R}7$, puisque 2 ne divise pas $11 = (18 - 7)$.

4. *La correspondance $\mathcal{R}'$ qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a,\ e,\ i,\ 0,\ u,\ y\}$.*
On a par exemple $0\mathcal{R}'e, 0\mathcal{R}'0, 0\not\mathcal{R}'a, 9\not\mathcal{R}'y, 6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

Définition 2.15. (Graphe d'une relation)
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble A vers un ensemble B. Le graphe de $\mathcal{R}$ (noté $G_{\mathcal{R}}$) est l'ensemble défini par :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x,\ y) \in A \times B / x\mathcal{R}y\} \tag{2.9}$$

Exemple 2.2.

1. *Reprenons la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 3 précédent, alors : $(1, 7) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(18, 7) \notin G_{\mathcal{R}}$.*

2. *Si on reprend la relation $\mathcal{R}'$ donnée par l'exemple 4 précédent, on aura :* $G_{\mathcal{R}'} = \{(0,\ e), (0,\ o), (1,\ u), (2,\ e), (2,\ u), (3,0), (3,\ i), (4,\ u), (4,\ a), (4,\ e)$,

$$(5,\ i),\ (6,\ i),\ (7,\ e),\ (8,\ u),\ (8,\ i),\ (9,\ e),\ (9,\ u)\}$$

Remarque 2.16.
Étant donné deux relations $\mathcal{R} = (A, B, R)$ et $\mathcal{R}' = (A', B', R')$, l'affirmation ≪ les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales≫ signifie que $A = A', B = B'$ et $R = R'$: même source, même but et même graphe.

2.2.1 Représentation d'une relation binaire

On s'intéresse à nouveau à des relations binaires sur deux ensembles A et B donnés.

1. **Représentation ensembliste :** On liste tout simplement les couples satisfaisant la relation.
2. **Représentation à l'aide d'un diagramme sagittal :** Schéma avec deux courbes pour des A et B quelconques (une première courbe pour la source A, et l'autre pour le but B) . Lorsque $A = B$, on peut soit conserver le schéma à deux courbes, soit tout ramener dans une seule courbe représentant A. Cette dernière vision est souvent fort instructive.

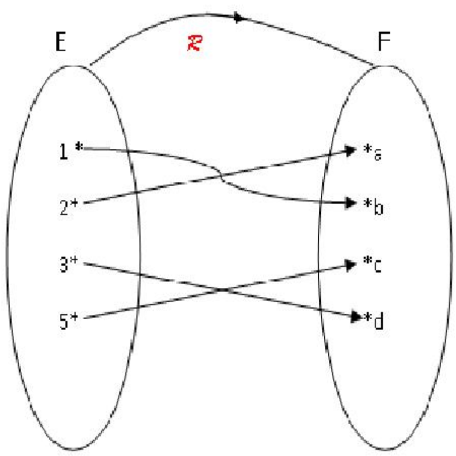

FIGURE 2.1: Diagramme sagittal d'une relation $\mathcal{R}$ de graphe $G_{\mathcal{R}} = \{(1,\ b), (2,\ a), (3,\ d), (5,\ c)\}$

3. **Représentation a l'aide d'un graphique cartésien :**Particulièrement commode pour des relations binaires sur $\mathbb{R}$ (ou encore sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).
4. **Représentation a l'aide d'une formule :** Par exemple la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $x\ \mathcal{R}\ y$ ssi $x^2 = y^2$.

2.2.2 Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble

On s'intéresse maintenant à une relation binaire dont la source coïncide avec le but. On se retrouve donc avec une relation sur un ensemble A donné.

Nous nous intéressons ici aux principales propriétés que peut posséder ou non une telle relation binaire.

Définition 2.17.
Soit $\mathcal{R}$, une relation (binaire) sur un ensemble A. On dit que $\mathcal{R}$ est

1. **réflexive** lorsque pour tout $a \in A$, on a $a \mathcal{R} a$;
2. **symétrique** lorsque pour tout couple $(a,\ b) \in A^2,\ a \mathcal{R} b$ impliquent $b \mathcal{R} a$;
3. **transitive** lorsque pour tout trio d'éléments $a, b, c \in A, (a \text{ R } b$ et $b \text{ R } c)$ impliquent $(a \text{ R } c)$;
4. **antisymétrique** lorsque pour tout $(a,\ b) \in A^2$ si ($a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} a$), alors $(a = b)$.

Exemple 2.3.

1. *Soit $A = B = \mathbb{Z}$ et $R = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ 2|(a-b)\}$. On a alors que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive, mais pas antisymétrique.*
2. *Etant donnée l'univers $\mathcal{U}$, la relation d'inclusion, qui relie deux parties de $\mathcal{U}$ $(X \subseteq Y)$, est elle aussi réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique.*
3. *Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : $x\mathcal{R}\ y \Leftrightarrow x$ divise y*
   (a) *Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a x divise x (même 0 divise 0). donc $\forall x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.*
   (b) *Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow$ (x divise y) $\nRightarrow$ (y divise x) par exemple 1 divise 4 et 4 ne divise pas 1 alors $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.*
   (c) *Soit $x, y \in \mathcal{R}$, on a $(x\mathcal{R}\ y) \wedge (y\mathcal{R}\ x) \Rightarrow$ ((x divise y) $\wedge$ (y divise x)) $\nRightarrow$ $(x = y)$.*
   Par exemple (1 divise -1) et (-1 divise 1) et $1 \neq -1$; alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
   (d) *Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow$ ((x divise y) $\wedge$ (y divise z)) $\Rightarrow$ (x divise z) $\Rightarrow x\mathcal{R}z$. Alors $\mathcal{R}$ est transitive.*

2.2.3 Relation d'équivalence

Définition 2.18.
Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A.

1. $\mathcal{R}$ est dite relation **d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors
   (a) Pour chaque $a \in A$ l'ensemble $\dot{a} = \{x \in A/x\mathcal{R}a\}$ est appelé **classe d'équivalence** de a modulo $\mathcal{R}$.
   (b) L'ensemble $A_{/\mathcal{R}} = \{\dot{a}/a \in A\}$ est appelé **l'ensemble quotient** de A par $\mathcal{R}$.

2.2.4 Relation d'ordre

Définition 2.19.
Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A.

1. $\mathcal{R}$ est dite relation **d'ordre** si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
2. (a) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de $\mathcal{R}$.
   (b) $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation **d'ordre total**, si
   $$\forall x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x)$$
   .
   (c) $\leq_{\mathcal{R}}$ est une relation **d'ordre partiel**, si
   $$\exists x, y \in A : \ ((x \not\leq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \not\leq_{\mathcal{R}} x))$$
   .

Remarque 2.20.
Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$.

Définition 2.21. (Eléments particuliers)
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E, et soit A une partie de$E$.

1. Un élément $m \in E$ est appelé un minimum de A ssi
   (a) $m \in A$,
   (b) pour tout $x \in A$, on a $m \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi de m qu'il est un plus petit élément de A.)

2. Un élément $M \in E$ est appelé un maximum de A ssi
   (a) $M \in A$,
   (b) pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} M$. (On dit aussi de M qu'il est un plus grand élément de A.)
3. Un extremum est un élément qui est un minimum ou un maximum.
4. Un élément $u \in E$ est appelé un minorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $u \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi que A est minoré par u).
5. Un élément $U \in E$ est appelé un majorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} U$. (On dit aussi que A est majoré par U).
6. L'ensemble A est dit minoré dans E si A admet un minorant dans E ; A est dit majoré dans E si A admet un majorant dans E ; et A est dit borné dans E si A est à la fois minoré et majoré.
7. Un élément $v \in E$ est appelé une borne inférieure de A ssi
   (a) v est un minorant de A,
   (b) pour tout minorant v' de A, on a $v' \leq_{\mathcal{R}} v$. (On dit aussi que v est un infimum de A.) Notation : $v = \inf(A)$.
8. Un élément $V \in E$ est appelé une borne supérieure de A ssi
   (a) V est un majorant de A,
   (b) pour tout majorant V' de A, on a $V \leq_{\mathcal{R}} V'$. (On dit aussi que V est un supremum de A.) Notation : $V = \sup(A)$.

2.3 Fonctions et applications.

2.3.1 Fonctions

Définition 2.22.

1. *Une relation f de E vers F est dite* fonction *si tout $x \in E$ a au plus une image y dans F. On dit aussi que f est une* fonction *et on écrit alors $y = f(x)$ au lieu de xfy. On écrit aussi*

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) . \end{aligned}$$

2. Le domaine de définition d'une fonction f (noté D_f) c'est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Définition 2.23.
Soit la fonction $f : E \to F$, A est une partie de E et B est une partie de F.

1. L'image de A par f est

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

2. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

Définition 2.24.

1. *La composée de la fonction $f : E \to F$ et de la fonction $g : F \to G$ est la fonction*

$$\begin{aligned} g \circ f :\ E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}.$$

2. Toute restriction d'une fonction reste une fonction.

2.3.2 Applications

Définition 2.25.
Une fonction f est une application *si tout élément de E à (exactement) une image dans F. On note $\mathcal{F}(E,\ F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F.*

Une fonction f est une application si et seulement si son domaine de définition est E tout entier.

Proposition 2.26.
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soient A et B deux parties de E. Alors,

(a) Si $A \subset B$, on a $f(A) \subset f(B)$

(b) On a toujours

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(c) On a toujours

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B.)$$

2. Soient A et B deux parties de F. Alors,

(a) Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

(b) On a toujours

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

(c) On a toujours

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \ .$$

3.

(a) Si A est une partie de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) Si B est une partie de f, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Démonstration. Voir TD. □

2.3.3 Injection, surjection, bijection

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition 2.27.

1. f est injective *si tout élément de F a au plus un antécédent* dans E. Autrement dit :
$$\forall x,\ y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
2. f est surjective *si tout élément de F à au moins un antécédent dans E.* Autrement dit :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$
3. f est bijective *si elle est à la fois injective et surjective* (*tout élément de F a exactement un antécédent dans E*).

On peut faire les remarques suivantes :

Remarque 2.28.