Centre universitaire de Mila
Institut des sciences et de la technologie

Troisième année mathématique
Matière : EDO

Série n° 2

Exercice n°1 :

Considérons l'équations $y^{'} = (1 + \cos t)y - y^3$ … … … (e)

1-Soient t_0 , $y_0 \in R$ étudier l'existence et l'unicité de la solution maximale y de l'équation (e) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

2-Soit φ une solution maximale de (e) tel qu'il existe $t_1 \in R$ qui vérifie $\varphi(t_1) = 0$ .Que peut on dire sur φ.

3- Montrer que la solution maximale ϕ de (e)qui vérifie $\phi(0) = 1$ est une fonction strictement positive sur son intervalle de définition J.Puis montrer que $\phi(t) \leq e^{2t}$ pour tout $t \in J_+ = \{t \in J: t \geq 0\}$.

Exercice n°2 :

1- Justifier l'existence de la solution maximale unique y de $y^{'} = \frac{1}{1+ty}$ qui vérifie $y(0) = 0$.
2- Montrer que y est une fonction impaire sur son intervalle de définition.
3- Montrer que y est une fonction croissante sur son intervalle de définition.

Exercice n°3 *(Application du th de Cauchy Lipschitz)*

1. Résoudre l'équation $y^{'} = y^2$.
2. Utiliser le théorème de Cauchy Lipschitz pour démontre que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitizienne, par rapport à y uniformément par rapport à t,sur R^2

Exercice n°5 :

Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'} = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ …………………..(P)

1- Montrer que les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont satisfaites.
2- Montrer que si y est solution de (P) sur J_y alors la fonction définie par $-y(-t)$ est aussi une solution de (P) sur $-J_y$.

Exercice n°4 : *(Solution globale)*

1. *Sans calculer la solution ; justifier l'existence d'une solution maximale unique* y *de l'équation* $y^{'} = 1 + y$ *qui vérifie* $y(0) = 1$.
2. *Déterminer son intervalle de définition.*