Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
Institut des Science et de la Technologie
Département de Mathématique et Informatique

Année 2017-2018
Master maths appliqués 2
Théorie de bifurcation et chaos

Série N°3

Exercice 1

On considère le système $\dot{x} = \mu\, x(x^2 - \mu^2)$, où $x \in \mathbb{R}$, μ étant un paramètre réel.

1. Déterminer ses équilibres. Linéariser le système autour de chacun d'entre eux.

2. Tracer et commenter le diagramme de bifurcation du système.

Exercice 2

On considère le système $\dot{x} = \mu\, x - \sin x$, où $x \in \mathbb{R}$, et $\mu \in [2/\pi,\ +\infty[$.

1. Montrer que, pour une plage de valeurs de μ qu'on déterminera, le système possède trois équilibres dont deux opposés qu'on notera $-a(\mu)$ (négatif) et $a(\mu)$ (positif).

2. Tracer le portrait de phases du système. En déduire la nature des équilibres.

3. Ce portrait atteste-t-il une bifurcation ? Si oui : de quel type ?

4. Pour quelles valeurs de μ la fonction $F(x) = x^2$ est elle une fonction de Liapounov au voisinage de l'équilibre zéro ?

Exercice 3

On considère le système $\dot{z} = f(z)$, dans lequel z et $f(z)$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$ euclidien.

En posant $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\|z\| = r$, f a pour expression

$$\boxed{f(z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \mu\, z\,(1 - r^2)}\ , \mu \text{ étant un paramètre réel.}$$

1. Vérifier que $\|\dot{z}\|^2 = r^2[1 + \mu^2(1 - r^2)^2]$.

2. En déduire que $z_0 = 0$ est le seul équilibre du système.

3. Déterminer la différentielle ∇f du champ f.

4. (a) Discuter de la stabilité de l'équilibre z_0 en fonction de μ.

(b) Le système présente-t-il des bifurcations ?

5. Tracer les trois portraits de phases correspondant respectivement à $\mu = 0$, $\mu = -1$ et $\mu = 1$.

6. Montrer que, pour $\mu = 1$, il y a un cycle-limite, qu'on déterminera.

Exercice 4

Considérons le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= b_1 u_1 z - k a_1 u_1 u_2, \\ \dot{u}_2 &= \nu k u_1 u_3 - b_2 u_2 z - k a_2 u_1 u_2, \\ \dot{u}_3 &= (S - b_3 u_3) z + k a_3 u_1 u_3 (1 - u_3/\theta) \end{aligned}$$

avec $z = 1 + k(u_1 + u_2 + m u_3)$. Ce système provient d'une modélisation de la réaction immunitaire chez les animaux face à l'invasion des antigènes. Pour

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \quad a_2 = 3\nu, \quad a_3 = 5, \\ &b_1 = \frac{1}{10}, \quad b_2 = \frac{\nu}{10}, \quad b_3 = \frac{5}{4}, \\ &m = S = k = 1, \quad \theta = 2, \end{aligned}$$

ν étant le paramètre de bifurcation, le système admet le point fixe suivant :

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right)^T.$$

Montrer que c'est un point de bifurcation de Hopf. Etudier sa stabilité.

Exercice 5

On considère le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{1+\nu}\left[-x_1 - \frac{15}{8} x_2 + x_1 x_3\right], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{15}{8} x_1 - x_2 - x_2 x_3\right], \\ \dot{x}_3 &= 1 - \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2. \end{aligned}$$

Calculer les points fixes du système ( ). Ecrire la matrice jacobienne à ces points fixes et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il y a une bifurcation de Hopf à $\nu = 0$.