Cours de la programmation linéaire
Pour les étudiants de la première année master mathématiques appliquées et mathématiques fondamentales
Département de mathématiques et informatiques
Université abdelhafid BOUSSOUF MILA
Anné universitaire 2022/2023

Chapitre 1

Table des matières

Introduction

La recherche opérationnelle peut être considérée comme un ensemble de méthodes utilisables pour élaborer des meilleures décisions. Elle permet de modéliser des problèmes issus du monde réel, identifer les méthodes de résolutions et les outils les plus adaptés face à un problème pratique. Elle fait partie de "l'aide à la décision" qui est un ensemble des techniques permettant pour une personne donnée d'opter pour la meilleure prise de décision possible. Comme toute théorie, la recherche opérationnelle ne cesse de se développer pour élargir son champ d'application dans les différents domaines. Certains problèmes de prise de décision imposent la prise en compte de la présence de plusieurs objectifs pour le preneur de décision. Par conséquent, l'homme d'étude doit s'appuyer sur ces objectifs, qui serviront de critères, pour sélectionner la décision réalisable à proposer au décideur.

La Programmation Linéaire est un cadre mathématique général permettant de modéliser et de résoudre certains problèmes d'optimisation. Mathématiquement le problème consiste à Optimiser une Fonction Linéaire sous des Contraintes Linéaires liant les variables. Historiquement, la programmation linéaire a été développée et utilisée en 1947 par George Bernard Danzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Department of the Air Force. Les premières applications se situaient dans le domaine militaire mais elles se sont rapidement déplacées vers l'industrie et la planification économique : il s'agit par exemple de déterminer la production maximisant le bénéfice compte tenu de ressources limitées ou minimisant les coûts tout en garantissant une production donnée, de résoudre des problèmes d'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés, ...

1

Introduction à la programmation linéaire

1.1 Notions fondamentales et Définitions

En 1960, le journal de la société de la recherche opérationnelle a défini la recherche opérationnelle comme suit :
" La recherche opérationnelle est l'application des méthodes scientifiques à des problèmes complexes qui se posant lors de la gestion de gros systèmes composées de l'homme, d'argent et de matières dans divers domaines tels que l'industrie, les finances, le gouvernement et la défence". L'approche est de développer un modèle scientifique du système qui inclut certains facteurs, avec lequel on prédit et on compare les conséquences des décisions (stratégies). L'objectif est d'aider le décideur à la prise de décision en lui fournissant un outil scientifique.

1.1.1 Méthodologie d'approche d'un problème de la recherche opérationnelle

Plusieurs étapes sont nécessiares pour oborder un problème de la recherche opérationnelle. La figure suivante resume ces différentes étapes :

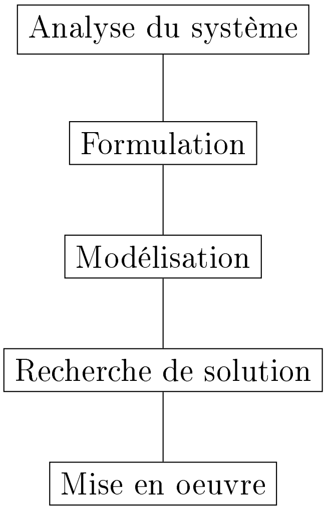


Figure 1.1 – graphe G

Analyse du système : C'est l'étape la plus dificile d'un problème de la recherche opérationnelle. Le but de cette analyse est de comprendre l'environnement dans lequel le problème est posé pour mieux cerner les aspects les plus importants. Il faut consacrer suffisement du temps et d'effort à cette phase.
Formulation d'un problème (structuration) : Cette phase consiste à identifier tous les objectifs et les contraintes du problème. il est évident que cette étape ne peut se faire sans la précédente. Une mauvaise analyse du système influe considérablement sur sa structuration. Un objectif est un but a atteindre. Il ne faut pas le confondre avec une action qui est un moyen a atteindre cet objectif. Il existe des situations ou le problème en question possède un objectif facilement identifiable et contifiable. Par exemple : maximiser un profil, minimiser un cout total, miniimiser une distance totale. . .
Par contre dans d'autres situations le problème posé possède plusieurs objectifs dont certains ne sont pas contifiable. Par dexemple : maximiser la satisfaction de la clientèle le toute en maximisant le profit total.
Modélisation : Il s'agit dans cette étape d'extraire une image aussi fidèle que possible de la réalité. Un modèle peut prendre la forme mathématiques (programme linéaire, non linéaire, graphe, modèle de regression...), simulation...
La constraction d'un modèle passe par plusieurs phases : Récuil des données, construction du modèle, validation du modèle.
Recherche de solution : La recherche de solution se fait par plusieurs techniques :
Technique d'optimisation : Pour une certaine classe de problèmes, il existe des algorithmes permettant d'offrir des solutions optimales. Par exemple en théorie des graphes l'algorithme

de Bellman résoud les problèmes de cheminement.
Méthodes heuristiques et Métaheuristiques : Parfois la recherche de solution optimale pour pour certain classes de problèmes (la classe NP) est impossible en raison du temps d'execution et de l'espace mémoire que l'on dispose. Nous avons alors recours à des méthodes approchées dites heuristiques. Par exemple pour le problème de voyageur du commerce l'heuristique du plus proche voisin permet d'offrir une solution approchée très simple. De nos jours nous assistons au développement de métaheuristiques offerant de meilleures solutions, on cite : Les algorithmes génétiques, la recherche Tabou,...
Simulation : En simulation le modèle représente le comportement réel du système en le laisse varier jusqu'à observer un comportement satisfaisant. Cette technique est une alternative aux méthodes précédentes.
Evaluation : Il s'agit de choisir un ensemble d'actions celles qui est la plus désirable. L'approche est d'évaluer scientifiquement les conséquences de chaque action puis de faire le choix selon certain critère défini au préalable.
Mise en oeuvre : La dernière étape consiste à mettre en oeuvre en utilisant des outils informatiques (programmation, base de données, ...) et à controler la solution obtenue à partir du modèle. souvent cette étape sert de Feed Back (Retour arrière) aux étapes précédentes.

1.2 Technique de la programmation linéaire

1.2.1 Rappel sur l'algèbre linéaire

1.2.1.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel V définit les corps des réels est un ensemble d'éléments vecteurs, appelés vecteurs ou points et noté x, y, z ... vérifiant : $\forall\ x, y \in V$, $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\ x + \mu\ y \in V$. 0 désigne le vecteur nul, neutre de la loi $+$. Lexpression $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ x^j$ est une combinaison linéaire des vecteurs x^j, x^j,..., x^n. Si de plus $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ est une combinaison linéaire convexe.
Une base d'un espace vectoriel V est une famille de vecteurs de V linéairement indépendants et dont tout vecteur de V est combinaison linéaire. En d'autres termes, une base de V est une famille libre de vecteurs de V qui engendre V. La dimension de V est le cardinal commun à toutes ses bases.

1.2.1.2 Rang d'une matrice

Une matrice A=(a_{ij}, i=1,...,m ,j=1,...,n) de dimension $m \times n$ peut etre considérée comme une matrice formée de m vecteurs lignes de dimension n. $\alpha_i = (a_{ij}$, j=1,...,n, i=1,...,m) ou de n vecteurs colonnes de dimension m B_j=(a_{ij}, i=1,...,m,j=1,...n)
Le rang de la matrice A, noté $rg(A)$ est le nombre maximal de vecteurs L.I parmis les m vecteurs lignes ou les n vecteurs colonnes.
Une matrice carrée B de dimension $m \times n$ est dite régulière si son rang $rg(B) = m$ est donc enversible et la matrice enverse vérifie B^{-1}B = BB^{-1} = $I_{n \times m}$.

1.2.1.3 Système d'equations

Soit un système de m equations à n variables A X = b. $\Sigma_{j=1}^{n} a_i^j x^j = b \qquad i = 1, m$
Les résultats de l'algèbre linéaire donnant :

- Si $rg(A) < rg(A, b)$ le système est impossible et ne possède aucune solution.
- Si $rg(A) = rg(A, b) = n$ le système possède une solution unique.
- Si $rg(A) = m$ (m<n) le système possède :
  - Une solution unique si $m = n$, cette solution est : x=$A^{-1}b$.
  - Une infinité de solution si m<n.
  - Si M est une matrice regulière de dimension m, les systèmes AX=B et MAX=MB sont équivalentes et ils possèdent le même ensemble de solutions.

1.2.2 Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire a été formulé par George Dantzing en 1947 à ses travaux effectuées durant la deuxième guerre mondial pour l'US AIR FORCE et a connu un developpement rapide. Le developpement de l'informatique, des ordinateurs de plus en plus puissants ont permis de traiter avec succés des problèmes concrés de taille importante.
Les domaines d'application de la programmation linéaire sont :

- Les domaines des mathématiques pures et appliquées ou la PL a permet d'obtenir des résultats théoriques.
- Le domaine de l'économie et spécialement l'économie de l'entreprise.
- L'industrie chimique, en particulier l'industrie du pétrole à tous les stades (Recherche, exploitation, production, raffinage, distribution...
- L'industrie alimentaire ...
- Le transport
- L'agriculture

Exemple 1.1 *Problème de répartition de ressources :*

Une usine fabrique trois sortes de pièces (P_1, P_2, P_3) à l'aide de deux machines (M_1, M_2). Chaque pièce en ours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifferent pendant les temps suivants en minutes.

machines,pièces	P_1	P_2	P_3	*disponibilité en heures*
M_1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$t_{1,3}$	t_1
M_2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$t_{2,3}$	t_2
profit	Π_1	Π_2	Π_3	/

Combien doit on fabriquer de pièces P_1, P_2, P_3 de manière à avoir un profit maximum ?

A. Formulation

Objectif : *Maximiser le profit total.*

Contraintes : *de ressources du temps, la disponibilité de la machine M_1, M_2.*

Il s'agit de déterminer le nombre de pièces de type P_1, P_2 et P_3 de façon à avoir un profit maximal tout en respectant les contraintes de ressources.

B. Modélisation : *Soit x_j (j=1,2,3) le nombre de pièces de type j à fabriquer.*

Le modèle mathématique :

$$MaxZ = \Pi_1 x_1 + \Pi_2 x_2 + \Pi_3 x_3$$

$$\begin{cases} t_{1,1}x_1 + t_{1,2}x_2 + t_{1,3}x_3 \leq 60t_1 \\ t_{2,1}x_1 + t_{2,2}x_2 + t_{2,3}x_3 \leq 60t_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.2.3 Définitions et différentes formes d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un problème qui consiste à optimiser (Maximiser ou Minimiser) une fonction linéaire à plusieurs variables soumise à un ensemble de contraintes linéaires. D'une manière générale un programme linéaire s'écrit :

$$OptF = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \quad x_1 + a_{1,2} \quad x_2 + ... + a_{1,n} \quad x_n \quad R_1 \quad b_1 \\ a_{2,1} \quad x_1 + a_{2,2} \quad x_2 + ... + a_{2,n} \quad x_n \quad R_2 \quad b_2 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{m,1} \quad x_1 + a_{m,2} \quad x_2 + ... + a_{m,n} \quad x_n \quad R_m \quad b_m \\ x_1, \quad x_2, ... \quad x_n \in E, \end{cases}$$

Avec R_1, R_2, . . ., R_n égalités ou inégalité. Les coefficients c_1, c_2,. . ., c_n sont des réels, de meme que les coefficients du système des contraintes aij (i=1,...,m ; j=1,...,n). En d'autre tèrme
Opt F = $\sum_{j=1}^{n} c_j \ x_j$
$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \ x_j \ R_i \ b_i$
La forme matricielle :
Opt F = CX
AX R B

1.2.3.1 La forme standard

: On appelle forme standard d'un programme linéaire la forme algèbrique suivante :

$$\begin{cases} MaxF = \sum_{j=1}^{n} c_j \quad x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad x_j \quad = \quad b_i, i = 1, ..., m \qquad\qquad b_i \geq 0 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

1.2.3.2 La forme canonique

: On appelle forme canonique d'un programme linéaire la forme algèbrique suivante :

$$\begin{cases} MaxF = \sum_{j=1}^{n} c_j \quad x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad x_j \quad \leq \quad b_i, i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.1 *Tout programme linéaire peut se mettre sous la forme standard ou canonique. En effet, il suffit de remarquer les transformations suivantes :*

1. Min f(x) $\Leftrightarrow$ Max (-f(x)) et donc Min f(x) =- Max (-f(x))
2. Lorsque une contrainte n'est pas égalité, supposons que la i^{eme} contrainte est sous la forme suivante :

$a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n \leq b_i$
On introduit une variable d'écart e_i et on obtient :

$a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n + e_i = b_i$
Dans le cas ou la i^{eme} contrainte est sous la forme suivante :

$a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n \geq b_i$
On introduit une variable d'écart e_i et on obtient :

$a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n$ - $e_i = b_i$

3. Une contrainte égalité

   $a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n = b_i$
   peut etre transformée en

   $a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n \leq b_i$
   $a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n \geq b_i$

4. Soit un b_i négatif ($b_i \leq 0$)

   $a_{i,1}\ x_1 + a_{i,2}\ x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{i,n}\ x_n = b_i\ (b_i \leq 0)$
   On multiplie par (-1) les deux membres de l'équation

   - $a_{i,1}\ x_1$ - $a_{i,2}\ x_2$ - . . . - $a_{i,n}\ x_n =$ - $b_i\ (b_i \leq 0)$

5. La i^{eme} variable est quelconque ($x_j \in \mathbb{R}$), il suffit de faire un changement de variable $x_j = x_j^1$ - x_j^2, x_j^1 ,$x_j^2 \geq 0$.

   Exemple 1.2 *Mettre sous forme standard et canonique les formes suivantes*

$$MinZ = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 3x_4 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Espace des solutions

Soit le problème de la programmation linéaire mis sous la forme standard :

$$\begin{cases} MaxZ = CX & (i) \\ AX = b, b \geq 0 & (ii) \\ X \geq 0 & (iii) \end{cases} \qquad (S)$$

A = (B, N)
A est une matrice de dimension (m $\times$ n),rang(A) = n tq m < n. Une solution du programme linéaire est un vecteur (x_1, x_2,. . ., x_n) $\in \mathbb{R}^n$ vérifiant (ii). Une solution est dite réalisable si elle vérifie (ii) et (iii)
B est une base, soit I l'ensemble des indices des variables correspondants à B. Soit J l'ensemble des indices des autres variables, les m variables associées au vécteur base sont appelées variables de base, les autres variables sont appelées variables hors base.
On posera X = (X_B,X_H) .
X_B l'ensemble des variables de base.
X_H l'ensemble des variables hors base.
On note aussi C = (C_B, C_H).
C_B les coefficients des variables de base.
C_H les coefficients des variables hors base.
Alors (S) peut etre réécrit de la mnière suivante :

$$\begin{cases} MaxZ = C_B X_B + C_H X_H \\ BX_B + HX_H = b \\ X_B \geq 0, X_H \geq 0 & (iii) \end{cases}$$

Si X_H = 0 alors BX_B = b $\Longrightarrow$ B^{-1} B X_B = B^{-1} b $\Longrightarrow$ X_B = B^{-1} b. (B^{-1} b, 0) est appelée solution de base de plus si B^{-1} b $\geq$ 0 elle est dite solution de base réalisable.
Une solution de base réalisable est dite digénérée si certains composantes de X_B sont nulles.
Une solution de base réalisable est dite optimale si elle maximise Z.

1.4 Géométrie de la programmtion linéaire

Définition 1.1 *Un ensemble $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}^{\ltimes}$ est dit convexe si :* $\forall$ x_1, x_2 $\in \mathbb{C}$, *0* $\leq \lambda \leq$ *1* $\Longrightarrow$ λ x_1 + *(1-*λ*)* x_2 $\in \mathbb{C}$

Proposition 1.2 *L'ensemble des solutions réalisables de (S) est un ensemble convexe.*

En effet, soit x_1 et x_2 deux solutions réalisables de (S) alors :
A x_1 = b, $x_1 \geq 0$ et A x_2 = b, $x_2 \geq 0$, $\forall$ $\lambda \in$ [0,1], λ x_1 + (1-λ) $x_2 \geq 0$ de plus A (λ x_1 + (1-λ) x_2) = A λ x_1 + A (1-λ) x_2 = λ b + (1-λ) b = b $\Longrightarrow$ λ x_1 + (1-λ) x_2 est une solution réalisable.

Définition 1.2 *Un point x d'un ensemble convexe $\mathbb{C}$ est dit point extrème si x ne peut pas etre exprimé comme une combinaison linéaire convexe des autres points de $\mathbb{C}$.*

Définition 1.3 *Un hyperplan dans $\mathbb{R}^{\ltimes}$ est l'ensemble suivant :*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}\}$$

Un hyperplan est de dimension (n-1), dim(H) = (n-1).
L'ensemble $H^+ = \{ x \in \mathbb{R}^n , \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...+ \alpha_n x_n \geq \beta_i , \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}\}$ est un demi espace fermé.

Définition 1.4 *L'intersection d'un nombre fini de demi espaces est appelée polyèdre. Un polyèdre non vide est borné est appelé polytope.*

Exemple 1.3 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$MaxZ = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard :

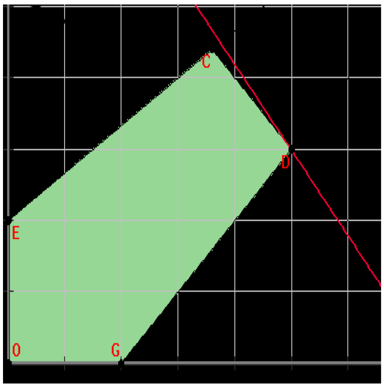
$$MaxZ = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 2 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_0(0,0,8,6,2) est une solution de base réalisable. $Z(x_0) = 0$ $D_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 8 \}$ D_1 est un demi espace fermé. La région réalisable (S) est un polyèdre borné alors polytope.



Proposition 1.3 *L'ensemble de solutions réalisables du programme linéaire standard ou* $(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ AX = b \ x \geq 0 \}$ *est un polyèdre convexe fermé.*

Théorème 1.1 *Toute solution de base réalisable de (S) tellle que* $(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ AX = b \ x \geq 0 \}$ *est un point extrème de (S) est inversement.*

Dans l'exemple 1.3 les points extrêmes sont O, G, D, C, E

Corollaire 1.1 *L'ensemble (S) possède au moins un point extrème.*

Théorème 1.2 *Soit (S) un polyèdre convexe fermé et borné* $(S) = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ AX = b \ x \geq 0 \}$ *ayant N points extrèmes* $s_1, s_2, \ldots, s_N$. *Tout points de (S) s'écrit comme combinaison convexe de ses points extrèmes* $\forall \ x \in S \ x = \sum_{j=1}^{S} \lambda_j \ Sj$ $\sum_{j=1}^{S} \lambda_j = 1,$ $\lambda_j \geq 0.$

Théorème 1.3 *La fonction objectif du problème standard (S) atteint son maximum en un point extrème dans l'ensemble de solutions réalisables. Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points extrèmes alors cette meme valeur est maximale en tout points qui est combinaison linéaire de ces points extrèmes*

1.5 Résolution d'un programme linéaire

Il décole des résultats montrés précédement que la détermination de la solution optimale d'un programme linéaire consiste à le mettre sous sa forme standard et à s'intéresser aux solutions de base réalisables (les points extrêmes). Il est impossible d'énumérer toutes les solutions de base réalisables car si on suppose que rg(A) = m(m $\leq$ n), le nombre maximum des points extrêmes est : $C_m^n = \frac{(n!)}{m!(n-m)!}$. Pour un problème de grand taille ce nombre est prohibitif il faut d'abord une exploration intelligente (méthode de résolution) ce problème est dit problème combinatoire.

1.6 Résolution graphique d'un programme linéaire

La méthode graphique est simple mais elle ne s'applique que au problème linéaire possèdant au plus deux variables. Le principe consiste à représenter le polyèdre convexe, à parcourir tous les sommets de ce polyèdre et à choisir celui qui optimise la fonction objectif alternativement ou trace le faisceau de droite Z = Z_0 et on le replace dans le sens du gradient (problème de maximisation) le dernier sommet rencontré est la solution optimale. Dans le cas de l'exemple 1.3 les points extrêmes sont O(0,0), G(2,0), D(5,3), C($\frac{18}{5}$,$\frac{22}{5}$), E(0,2).
Z = 6 x_1 + 5 x_2, Z(O) =0, Z(G) = 12, Z(D) = 45, Z(C) = $\frac{218}{5}$, Z(E) =10. La valeur maximale est atteinte en D(5,3).

Exemple 1.4 *Une usine fabrique deux produits p_1 et p_2 sur trois machines M_1, M_2 et M_3. p_1 est fabriqué sur M_1, M_2 alors que p_2 est fabriqué sur les trois machines. Le temps de séjour de chaque produit sur chaque machinesont donnés*

	M_1	M_2	M_3	*profit unitaire*
p_1	*0.25*	*0.4*	*0*	*2*
p_2	*0.5*	*0.2*	*0.8*	*3*
disponibilité	*40 h*	*40 h*	*40 h*	

Il s'agit de trouver la solution graphique qui maximise le profit.
Solution :

$$MaxZ = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 40 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 40 \\ 0.8x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$