Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2018/2019

Matière : *Algèbre 3* Durée : 1h30mn
Responsable : *Y. Halim*

Examen Finale

14 Janvier 2019

Exercice 3 : (6 Pts)

I- Soit f un endomorphisme sur un espace vectoriel E. λ, μ deux valeurs propres distictes ($\lambda \neq \mu$). Montrer que

$$E_\lambda \cap E\mu = \{0_E\}.$$

II- Soit $A \in M_n(K)$ une matrice inversible.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nul de A, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^{-1} est diagonalisable.

Exercice 2 : (8 Pts)

Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres de A_α.
2. Déterminer les valeurs de α pour A_α soit diagonalisable.
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

Exercice 3 : (6 Pts)

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est trigonalisable.
2. Calculer e^{tM}, avec $t \in \mathbb{R}$.