

Matière : Algèbre 3  
Responsable : Y. Halim

Durée : 1h

EXAMEN DE RATTRAPAGE  
22/11/2020

Exercice 1 : (5 Pts)

Soit  $f$  un endomorphisme sur un  $k$ -espace vectoriel.

1. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , alors  $\lambda^n$  est une valeur propre de  $f^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
2. On suppose que  $f$  est nilpotent c'est-à-dire  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n = 0$ .
  - a) Déterminer toutes les valeurs propres de  $f$ .
  - b) Déterminer les sous espaces propres associés.

Exercice 2 : (15 Pts)

Soit la matrice  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 1 - \alpha \\ 2 + \alpha & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres de  $A_\alpha$ .
2. Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour  $A_\alpha$  soit diagonalisable.
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - z(t), \\ z'(t) = 4x(t) + y(t) - 2z(t). \end{cases}$$

avec  $(x(0), y(0), z(0)) = (0, -5, -1)$ .