Université Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2019/2020

---

Matière : *Algèbre 3* Durée : 1h30mn
Responsable : *Y. Halim*

# Examen Finale

Janvier 2020

***Exercice 1 :*** (5 Pts)

**I.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de $f$, $P_f(x) = (x - \alpha)^n$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit diagonalisable.

**II.** On suppose que $g$ est nilpotent c'est-à-dire $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0$.

- **a)** Déterminer toutes les valeurs propres de $g$.
- **b)** Déterminer les sous espaces propres associés.
- **c)** Donner une conditions sur $Ker g$ pour soit $g$ diagonalisable.

***Exercice 2 :*** (8 Pts)

Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & -\alpha-1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres de $A_\alpha$.
2. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour $A_\alpha$ soit diagonalisable.
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t), \\ z'(t) = 3x(t) + 2z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

***Exercice 3 :*** (7 Pts)

Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.
2. Calculer $e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$.