Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2020/2021

Matière : *Algèbre 3*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 1(Révision)

Exercice 1 : (Examen Algèbre 2 (2020))

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2 : (Examen Algèbre 2 (2020))

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Monter que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donné une base de F.
2. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?
3. On pose $G =< u_1, u_2, u_3 >$. Quelle est la dimension de G ?

Exercice 1 :

Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices $-5E, A + B, A - E, AB, BA, CD, DC, AE, CE$.

Exercice 2 :

Soit f et g les applications définies par :

$$f: \begin{array}{cl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (3x - 4y, 2x - y) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{cl} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto (X - 1)P' - 2P \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes.
2. Donner la matrice M_f de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice M_g de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 :

Calculer les déterminants des matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 123 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -79 & 61 & 0 \\ 85 & -93 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M_α et déduire les valeurs de α pour être M_α inversible.
2. Calculer M_1^{-1} l'inverse de M_1.

Exercice 5 : (*Examen Algèbre* 2)

Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est un application linéaire et déterminer M la matrice associée a f par rapport a B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B' la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de Im(f). Déduire le rang de f.
3. Déterminer une base de ker(f).
   L'application f est-elle injective ? surjective ?

Références bibliographiques :

1. Algèbre linéaire et bilinéaire 510/516.
2. Algèbre, exercices et problème 510/420.
3. Exercices corrigé d'algèbre linéaire, Tom 2 510/27.
4. Algèbre linéaire 510/24.
5. Les mathématiques en licence, tom 4 510/1056.
6. Algèbre linéaire 510/1065.
7. Réduction des endomorphismes : exercices corrigés avec rappels de cours 510/15.
8. http// www.exo7.fr.