

Série de TD n° 1 : syntaxe du calcul propositionnel

Exercice 1:

I- Étant donné que p représente la proposition « X estime Y , » et q représente « Y estime X », formalisez les phrases suivantes en calcul propositionnel :

1. X n'estime pas Y
2. X estime Y et Y estime X
3. X et Y s'estiment
4. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime
5. X estime Y ou Y estime X
6. Si X estime Y alors Y estime X
7. X estime Y si et seulement si Y estime X

II- Traduisez les raisonnements suivants en formules de la logique propositionnelle :

1. S'il pleut, alors je prends mon parapluie ; il pleut ; par conséquent je prends mon parapluie.
2. S'il pleut, alors je prends mon parapluie ; je ne prends pas mon parapluie ; par conséquent il ne pleut pas.
3. Quand Ali a la fièvre, il est malade, quand il a des rougeurs, il est malade aussi donc s'il n'est pas malade il n'a ni fièvre ni rougeurs.
4. Quand Ali a la fièvre, il est malade, quand il a des rougeurs, il est malade aussi donc s'il est malade mais qu'il n'a pas de fièvre, il n'a pas de rougeurs.

III- Formalisez en logique propositionnelle chacun des énoncés suivants :

1. S'il est venu seul, il a pris le bus ou le train. S'il a pris le bus ou son voiture alors il est arrivé en retard et a manqué la réunion. Il n'est pas arrivé en retard. Donc s'il est venu seul il a pris le train.
2. Une banque est dirigée par un directeur, deux sous directeurs et deux caissiers de coffre-fort. Un coffre-fort ne peut être ouvert qu'en présence du directeur ou des deux sous directeurs ou d'un sous directeur et deux caissiers.

Exercice 2:

I- Soient deux variables propositionnelles p , q tel que p représente la proposition « l'enfant sait lire » et q représente la proposition « l'enfant sait écrire ». Traduisez les formules suivantes en des phrases en langage naturel :

1- $(p \wedge q)$, 2- $(p \wedge \neg q)$, 3- $(q \rightarrow p)$, 4- $(\neg p \vee \neg q)$, 5- $(p \rightarrow \neg q)$, 6- $\neg(p \wedge q)$,

II- considérons les informations élémentaires suivantes :

p : Il a besoin d'un médecin, q : Il a besoin d'un secouriste, r : Il a eu un accident, s : Il vomit et u : Il est blessé.

Traduire les formules suivantes en phrases du langage naturel :

- | | |
|--|---|
| (1) $((s \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q))$ | (2) $(p \rightarrow (s \vee u))$ |
| (3) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ | (4) $((p \wedge q) \leftrightarrow (s \wedge u))$ |

$$(5) (\neg(s \vee u) \rightarrow \neg p)$$

Exercice 3:

Parmi les mots suivants, déterminez ceux qui sont des formules bien formées complètement parenthésées du calcul propositionnel (**appliquant strictement la définition vu au cours**)??

- 1- (), 2- (p), 3- $\neg p$, 4- $\neg(p)$, 5- $(\neg p)$, 6- $\neg pq \wedge r$, 7- $p \wedge q$, 8- $\vee pq$, 9- $(p \wedge q)$, 10- $\neg p \neg q$, 11- $\neg(\neg p)$, 12- $\neg \neg \neg p$, 13- $(\neg p \leftrightarrow q)$, 14- $\neg(p \wedge q)$, 15- $(p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, 16- $(p \rightarrow p)$, 17- $p \vee q \wedge r$, 18- $(p \rightarrow (q \wedge r))$, 19- $\neg(\neg(\neg \neg p \vee q) \rightarrow \neg r)$, 20- $((p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (\neg p \rightarrow q)) \wedge (q \vee \neg r)$

Exercice 4:

I- Explicitez le parenthésage implicite des formules suivantes :

1. $p \rightarrow q \rightarrow r$
2. $p \vee q \wedge r$
3. $p \vee q \wedge r \leftrightarrow s \rightarrow \neg e \vee f \wedge g$
4. $p \vee q \wedge r \rightarrow \neg \neg p \wedge q \leftrightarrow p \wedge q$

II- Simplifiez au maximum le parenthésage des formules suivantes en éliminant les parenthèses superflues:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. (p) | 2. ((p ∨ q)) |
| 3. ((p) ∧ (q)) | 4. (¬(p ∨ q)) |
| 5. ¬(((p) ∧ q)) | 6. p ∨ (q ∧ r) |
| 7. (p ∨ q) ∧ r | 8. ((p ∧ q) → r) |
| 9. (p ∧ (q → r)) | 10. ((p ∨ q) ∧ r) ↔ e |
| 11. (((p ∨ q) ∧ r) ↔ e) → f | 12. ((p ∧ q) ∨ r) ↔ (e → f) |
| 13. (((p → q) → r) → s) | 14. (p ∧ (q ∧ r)) |
| 15. (p → (q → r)) | |
| 16. ((p) → (q)) → (((q) → (r)) → ((p) → (r))) | |
| 17. (¬((p) ∨ (¬(q)))) → (¬(p) → (p)) | |
| 18. (¬(¬((p) ∨ (q)))) → ((¬(¬(p))) ∨ (¬(¬(q)))) | |

Exercice 5 :

Déterminez toutes les formules possibles de longueur 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Exercice 6 :

Pour chacune des formules de l'exercice 3, déterminez sa longueur puis sa hauteur

Exercice 7 :

Soient les formules propositionnelles :

$$F_1 = (((\neg p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg \neg q \wedge \neg r))$$

$$F_2 = \neg \neg ((p \leftrightarrow q) \vee (\neg \neg q \wedge p))$$

$$F_3 = (\neg((p \vee q) \wedge p) \rightarrow \neg(q \leftrightarrow \neg p))$$

Pour chacune de ces formules, déterminez :

1. Sa longueur ;
2. Sa hauteur en utilisant la définition ;
3. Ses sous formules ;
4. Son arbre de décomposition.

Exercice 8 :

I- Soit F une formule propositionnelle. Soit n le nombre de connecteurs binaires $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ et m le nombre d'occurrences des propositions élémentaires dans F . Démontrez par **induction sur les formules** que :

$$m = n + 1$$

II- Démontrez par **induction** que le nombre de parenthèse dans une formule propositionnelle F est pair.

III-

1- En utilisant l'arbre d'une formule, vérifiez que :

- $h[\neg F] = h[F] + 1$.
- $h[(F * G)] = \max(h[F], h[G]) + 1$

2- Démontrez par **induction** que la hauteur d'une formule F est strictement inférieure à sa longueur :

$$h[F] < l[F]$$

Exercice 9:

Soit la formule $F = ((p \wedge q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee r)))$

Trouvez les formules :

1. $F[q/p]$
2. $F[r/p, (r \wedge p)/r]$
3. $(F[r/p])[(r \wedge p)/r]$
4. $(F[r/p, q/s])[(r \wedge p)/r]$
5. $(F[(p \wedge q)/p])[\neg \neg p/p]$