Centre universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Troisième année mathématique

Matière : EDO

Série n° 1

Exercice n°1 : (Résolution des équations à variables séparées)

1-Résoudre l'équation $(1+e^x)y' = e^x$.

2-Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice n°2 :(*Réqularité de la solution*)

Soient I un intervalle ouvert de R , Ω un ouvert de R et $f : I \times \Omega \to R$. Soit $k \in N$.

1- Montrer que si $f \in C^k(I \times \Omega)$ alors toute solution y de $y' = f(t,y)$ est de classe $C^{k+1}(J)$. Ici, J est intervalle de définition de y.
2- Application : Montrer que les solutions de l'équation $y' = e^t + y$ sont de classe $C^2(J)$.

Exercice n°3 *(Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy)*

Soient I un intervalle ouvert de R , Ω un ouvert de R et $f : I \times \Omega \to R$ une fonction continue.

Soient J un intervalle non vide de I et $y : J \to R$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. *y est une solution sur J du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
ii. *y est une fonction continue sur J En plus, pour tout $t \in J$, on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$.*

Exercice n°4 : *(Condition de Lipschitz)*

1. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = t^2 + y^2$ est localement lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t, sur R^2.*
2. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur R^2.(Inducation : Considérer $(t_0, 0) \in R^2$)*

Exercice n°5 :(*Fonctions Lipschitziennes*)

Les fonctions suivantes sont elles localement Lipschitzienne en y sur des domaines de la forme $I \times \Omega$: $f_1(t,y) = e^{ty}$, $f_2(t,y) = ye^{t^2}$, $f_3(t,y) = t\sqrt{|y|}$, $f_4(t,y) = sinty$, $f_5(t,y) = |y|\ln(1+t^2)$.