Théorie de Bifurcation et Chaos

Série $N^o 1$

Exo: 1. *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \tag{1}$$

1. *Étudier la stabilité de l'origine.*
2. *Écrire (1) dans les coordonnés polaire.*
3. *Montrer que* $X(t) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$ *est un solution périodique de (1).*
4. *Tracer l'orbite* γ_{X_0} *avec* $X_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ *qui correspond á x(t) dans (3) en déduire le portrait de phase de (1).*

Exo: 2. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})) \\ \dot{x} = \dot{x} = 0 \qquad \qquad \textit{pour} \qquad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{2}$$

1. *Réécrire ce système dans les coordonnées polaires.*
2. *Montrer que ce système admet un nombre infini de cycle limites qui accumulent á l'origine.*

Exo: 3. *Considérons le système :* $\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x + y - x^2y - y^3 \\ \dot{z} = \lambda z \end{cases}$

1. *Montrer que* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$ *est une orbite périodique de* (I) *de période* $T = 2\pi$.
2. *Calculer* $\Delta f(x)$ *en déduire le système linéarisé de* (I) *a l'orbite* $\gamma(t)$.
3. *Soit* $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t & 0 \\ e^{-2t}\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.
   - *Montrer que* Φ *est la matrice fondamental du système linéaire qui satisfait* $\Phi(0) = I$.
   - *Donner une matrice* $2\pi-$ *périodique* $\varphi(t)$ *et une matrice diagonale* B *tq :*$\Phi(t) = \varphi(t) \cdot e^{tB}$.

4. Donner les exposants caractéristiques de γ et $DP(x_0)$, avec $x_0 = (1, 0, 0)^T$
– En déduire les dimensions des variétés de γ

Exo: 4. *Démontrez qu'un système linéaire ne peut admettre de cycle limite :*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

$$ou\ a + d \neq 0$$

Exo: 5. *Montrer que le système suivant (système de compétition) n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans le cadran positive :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - ay) \\ \dot{y} = y(1 - y - bx) \end{cases}$$

a et b sont deux paramètre strictement positifs.

Exo: 6. *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - 2b - r^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - r^2) \end{cases}$$

$r=\sqrt{x^2 + y^2}$ et b est un paramètre $0 \leq b < 1/2$

1. Écrire le système en coordonnés polaires
2. Déterminer une région trappe en forme de couronne autour de l'origine et déduisez l'existence d'une orbite périodique
3. Établissez que si $b = 0$ il existe un unique cycle limite

Exo: 7. *Montrer que le système suivant admet un cycle limite (Proposer un domaine d'attraction permettant dáppliquer le théorème de Poincaré Bendixon)*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -2x + 3y(1 - 3x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

Exo: 8. *soit le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x + \gamma y - x^2 y - x^3 \end{cases}$$

Démontrer que ce système admet un cycle limite.