Exemples d'applications du Théorème de Poincaré-Bendixson

Établir l'existence d'une orbite périodique.

Pour établir l'existence d'une orbite périodique à partir du Théorème de Poincaré-Bendixson, on doit trouver une région trappe M qui ne contient pas d'équilibres.

Considérons à titre d'exemple le système

$$\dot{x} = y + \frac{1}{4}x(1-2r^2) \quad , \quad \dot{y} = -x + \frac{1}{2}y(1-r^2),$$

où $r^2 = x^2 + y^2$. Cherchons d'abord les points fixes de ce champ de vecteurs. La première équation donne

$$y = -\frac{1}{4}x(1-2r^2)$$

et après substitution dans la deuxième équation on trouve

$$-x\left(1 + \frac{1}{8}(1-2r^2)(1-r^2)\right) = 0.$$

Donc il y a un point fixe à l'origine $(x, y) = (0, 0)$ et tout autre point fixe doit vérifier l'équation

$$2r^4 - 3r^2 + 9 = 0.$$

Comme cette équation n'a pas de racines réelles, l'origine est donc le seul point fixe du système. En différentiant l'expression $r^2 = x^2 + y^2$ par rapport à t, on trouve $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ et, en passant aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\left(y + \frac{1}{4}x(1-2r^2)\right) + y\left(-x + \frac{1}{2}y(1-r^2)\right) \\ &= \frac{1}{4}x^2(1-2r^2) + \frac{1}{2}y^2(1-r^2) \\ &= \frac{1}{4}r^2(1+\sin^2\theta) - \frac{1}{2}r^4, \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{r} = \frac{1}{4}r(1+\sin^2\theta) - \frac{1}{2}r^3.$$

Notons que $\dot{r} > 0$ pour tout θ pour autant que $\frac{r}{4} - \frac{r^3}{2} > 0$, c'est-à-dire $r^2 < \frac{1}{2}$ et que $\dot{r} < 0$ pour tout θ pour autant que $r - r^3 < 0$, c'est-à-dire $r > 1$. Soit

$$M = \left\{ (r,\theta) \middle| \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 1 \right\}.$$

Puisque l'origine est le seul point fixe du système, la région M ne contient pas d'équilibres. Puisque $\dot{r} > 0$ si $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dot{r} < 0$ si $r > 1$, toutes les trajectoires restent dans M, pour tout $t \geq 0$. Comme M est compacte, c'est donc une région trappe qui ne contient pas d'équilibres. En vertu du Théorème de Poincaré-Bendixson, il existe donc *au moins une orbite périodique* dans M.