

1.4.1 Fonctions Lipschitzienne par rapport à y

Définition 1.4.1 Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur C s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t .

Exemple 10 Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1, +\infty[$ alors

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = 2|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| = 2 \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}.$$

Mais $y_1 \geq 1$ et $y_2 \geq 1$ donc $\sqrt{y_1} \geq 1$ et $\sqrt{y_2} \geq 1$ d'où $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2}$. Alors $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$, avec $k = 1 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in [1, +\infty[: |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Ceci implique que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$ est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $C = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

Exemple 11 Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = y$. Soient $t \in I = \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R}$. On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2| \leq k |y_1 - y_2|$ avec $k = 1 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in I = \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R} : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Ceci implique que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t .

Remarque 1.4.1 Le terme *uniformément* dans les définition ci-dessus veut dire que le rapport k ne dépend pas de t . Si on considère, par exemple, la fonction f définie par $f(t, y) = 2t\sqrt{y}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1, +\infty[$ on a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = 2|t| |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq k(t) |y_1 - y_2|$ avec $k(t) = 2|t|$ est une fonction non majorée dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la fonction f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y , sur $C = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. Mais non pas uniformément par rapport à t car le rapport k dépend de t .

Définition 1.4.2 On dit que f est une fonction **localement** Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$ si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ ils existent $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur C .

Exemple 12 La fonction f définie par $f(t, y) = y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. En effet, soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soient $T_0, r_0 > 0$ quelconques. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| |y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|) |y_1 - y_2|.$$

Mais

$$|y_1| = |(y_1 - y_0) + y_0| \leq |y_1 - y_0| + |y_0| \leq r_0 + |y_0|.$$

De même, on trouve que $|y_2| \leq r_0 + |y_0|$. Ainsi, $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$ avec $k = 2(r_0 + |y_0|)$.

Notons ici que f est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur tout $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ car il n'y a aucune condition sur T_0 et r_0 .

Lemme 1.4.1 Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$. Rappelons que $f \in C^1(I \times \Omega)$ veut dire que $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $I \times \Omega$ et elles sont continues sur $I \times \Omega$.

Preuve 6 Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Choisissons $T_0, r_0 > 0$ tels que $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ et $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. Soient $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Si on applique le théorème des accroissements finis sur f dans l'intervalle $[y_1, y_2]$ on trouve $c \in]y_1, y_2[\subset [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ tel que $f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c)(y_1 - y_2)$. Ainsi $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right| \cdot |y_1 - y_2|$. Puisque $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $I \times \Omega$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ alors elle est bornée sur $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ce qui implique que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \left(\sup_{(t,y) \in C} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \right) \cdot |y_1 - y_2| = k |y_1 - y_2|.$$

Avec $k = \sup_{(t,y) \in C} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$. Ce qui implique que f est localement lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$.

Application : La fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = t^2 y^2$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ car c'est une fonction polynôme. Ceci implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $\mathbb{R}^2$.

Test : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$ par $f(t, y) = \frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

1.4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.4.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que f est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (PC) admet une solution unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ avec $T_0, r_0 > 0$ tels que f soit Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et $M = \sup_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$.

Preuve 7 On va utiliser la méthode d'approximations successives de Picard : Pour cela on va considérer la suite de fonction (y_n) définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ par

$$\begin{cases} y_0(t) := y_0, \\ y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y_n(u)) du, \end{cases} \quad n \geq 0.$$

1. Montrons que (y_n) est bien définie : Pour cela, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) \text{ et } y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T]).$$

Par récurrence :

(a) Pour $n = 0$: Pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $y_0(t) := y_0 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

En plus, on a y_0 est la fonction constante y_0 alors elle est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

(b) Supposons que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ et $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ et montrons que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ et $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$: Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. On a

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(u, y_n(u)) du \right| \leq \sup_{(t,y) \in C} |f(t, y)| |t - t_0| = M |t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0 \text{ car } T \leq \frac{r_0}{M}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. D'autre part, puisque $f \in C^0([t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0])$ et $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ alors la fonction $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y_n(u)) du$ est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Ainsi, $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$.

2. Montrons que la suite (y_n) est uniformément convergente vers une fonction continue y : Au début, on montre, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) Pour $n = 0$: On a pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{0+1}(t) - y_0(t)| &= |y_1(t) - y_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(u, y_0(u)) du \right| \\ &\leq M |t - t_0| = Mk^0 \frac{|t - t_0|^{0+1}}{(0+1)!}. \end{aligned}$$

(b) Supposons que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq Mk^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}$.

On a pour $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(u, y_n(u)) - f(u, y_{n-1}(u))] du \right| \\ &\leq k \int_{t_0}^t |y_n(u) - y_{n-1}(u)| du \stackrel{\text{hyp.récu}}{\leq} Mk^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (u - t_0)^n du \\ &= Mk^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De même, on montre

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ce qui achève la démonstration. Puisque $|t - t_0| \leq T$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \frac{M}{k} \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'autre part, si $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p$ alors on a pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$:

$$\begin{aligned}
|y_q(t) - y_p(t)| &= |(y_q(t) - y_{q-1}(t)) + (y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)) + \dots + (y_{p+1}(t) - y_p(t))| \\
&\leq |y_{p+1}(t) - y_p(t)| + \dots + |y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)| + |y_q(t) - y_{q-1}(t)| \\
&\leq \frac{M(kT)^{p+1}}{k(p+1)!} + \dots + \frac{M(kT)^{q-1}}{k(q-1)!} + \frac{M(kT)^q}{kq!} = \frac{M}{k} \sum_{l=p+1}^{l=q} \frac{(kT)^l}{l!} \\
&\leq \frac{M}{k} \sum_{l=p}^{l=q} \frac{(kT)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Soit $\frac{M}{k} \sum_p^{+\infty} \frac{(kT)^l}{l!}$ le reste de la série numérique convergente $\frac{M}{k} \sum_0^{+\infty} \frac{(kT)^l}{l!}$ alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p : p \geq N \Rightarrow \frac{M}{k} \sum_{l=p}^{+\infty} \frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \frac{M}{k} \sum_{l=p}^{+\infty} \frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Ici $\|g\| := \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |g(t)|$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \varepsilon.$$

D'après le critère de Cauchy, on trouve que (y_n) est une suite uniformément convergente vers une fonction notée y dans $[t_0 - T, t_0 + T]$. En plus, elle est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a y_n sont continues sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3. Montrons que y vérifie l'équation intégrale $y = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y) du$ et que y est une

fonction à valeurs dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$: On a

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y_n(u)) du \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Puisque (y_n) est une suite uniformément convergente vers y alors après passage à la limite, on trouve

$$y(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \text{ pour tout } t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \quad (EI)$$

De plus, on peut montrer que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $|y(t) - y_0| \leq r_0$ (A faire). Ce qui implique que, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on a $y(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

4. Montrons que le problème de Cauchy (PC) admet une solution locale : Puisque y est une fonction continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et elle vérifie l'équation intégrale (EI) alors, d'après l'exercice 5 du td I, y est une solution de (PC).
5. Montrons l'unicité de la solution de (PC) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeurs dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$: Soit $\tilde{y}$ une autre solution de (PC) définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeurs dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ alors, d'après l'exercice 5 du td I, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on a $\tilde{y}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(u, \tilde{y}(u)) du$. Ainsi pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a $|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(u, y(u)) - f(u, \tilde{y}(u))) du \right|$. Si $t \in [t_0, t_0 + T]$ alors

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(u, y(u)) - f(u, \tilde{y}(u))| du.$$

Puisque f est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ alors $|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq k \int_{t_0}^t |y(u) - \tilde{y}(u)| du$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. Si on applique le lemme de Gronwall (voir td I exercice 2) avec $a = t_0, b = t_0 + T, c = 0, d = k > 0$ et ψ la fonction continue sur $[a, b] = [t_0, t_0 + T]$ définie par $\psi(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)|$ on trouve $|y(t) - \tilde{y}(t)| = \psi(t) \leq ce^{d(t-a)} = 0$ pour tout $t \in [a, b] = [t_0, t_0 + T]$. Ainsi $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

De même, on montre que $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour $t \in [t_0 - T, t_0]$.

Application : Montrons que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = t^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$
admet une solution locale unique définie sur $[-T, T]$ où T est donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz : La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. En plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ donc elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Remarque 1.4.2 *L'unicité de la solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ veut dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (PC) définies sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ alors $y_1 = y_2$.*

Remarque 1.4.3 *La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz peut se faire en utilisant une autre méthode qui est la méthode du point fixe (voir [De]).*

Lemme 1.4.2 *Soit f une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$. Si y_1 est une solution de (PC) définie sur J_1 et y_2 est une solution de (PC) définie sur J_2 . Alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Preuve 8 *On remarque que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide car l'intersection de deux intervalles est un intervalle, en plus, $t_0 \in J_1 \cap J_2$. Considérons l'ensemble $A = \{t \in J_1 \cap J_2 : y_1(t) = y_2(t)\}$.*

1. *On a $A \subset J_1 \cap J_2$ (Par construction).*
2. *A est un fermé de $J_1 \cap J_2$ car*

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2 : (y_1 - y_2)(t) = 0\} = (y_1 - y_2)^{-1}\{0\}.$$

$\{0\}$ est fermé de $\mathbb{R}$ et $y_1 - y_2$ est une fonction continue sur $J_1 \cap J_2$.

3. A est un ouvert de $J_1 \cap J_2$. En effet, Soit $t \in A$ (Ici t est fixé). Afin de simplifier, on écrit t_* au lieu de t . Montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $t_* \in]t_* - \alpha, t_* + \alpha[\subset A$: Puisque $t_* \in A$ alors $t_* \in J_1 \cap J_2$ et $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. On pose $y_* = y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Alors, y_1, y_2 sont deux solutions de
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_*) = y_*. \end{cases} \quad \text{Soient } T_1, T_2 > 0 \text{ tels que}$$
 $[t_* - T_1, t_* + T_1] \subset J_1$ et $[t_* - T_2, t_* + T_2] \subset J_2$. Soit T donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué sur (t_*, y_*) . Posons $T_* = \min(T_1, T_2, T)$. Ainsi, y_1 et y_2 sont deux solutions définies sur $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset [t_* - T, t_* + T]$ du même problème de Cauchy. D'après l'unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on trouve que $y_1 = y_2$ sur $[t_* - T_*, t_* + T_*]$. Donc $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset A$. D'où le résultat avec $\alpha < T_*$.
4. Conclusion : On a $\emptyset \neq A$ est un ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$ et $J_1 \cap J_2$ est un connexe (car $J_1 \cap J_2$ est un intervalle de $\mathbb{R}$) alors $A = J_1 \cap J_2$ ie. $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

Corollaire 1.4.1 Si f est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \Omega$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique.

Preuve 9 Considérons toutes les solutions y du problème de Cauchy (PC) et considérons tout les intervalles de définition J . On pose $J_{\max} := \bigcup_{y \text{ solution de (PC) définie sur } J} J$. On a $J_{\max} \subset I$ et $t_0 \in J_{\max}$.

Montrons que $J_{\max}$ est un intervalle : Soient $a, b \in J_{\max}$ tels que $a < b$. Alors ils existent deux solutions y_1 et y_2 de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 telles que $a \in J_1$ et $a \in J_2$. On distingue 3 cas :

Cas 1 : Si $t_0 \in]a, b[$ alors $[a, t_0] \subset J_1$ et $[t_0, b] \subset J_2$ car J_1 et J_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, t_0 \in J_1$ et $t_0, b \in J_2$. Ainsi, $[a, b] = [a, t_0] \cup [t_0, b] \subset J_{\max}$.

Cas 2 : Si $t_0 \leq a$ alors $[a, b] \subset [t_0, b] \subset J_2 \subset J_{\max}$.

Cas 3 : Si $b \leq t_0$ alors $[a, b] \subset [a, t_0] \subset J_1 \subset J_{\max}$.

Considérons la fonction $y_{\max}$ définie sur $J_{\max}$ comme suit si $t \in J_{\max}$ alors il existe une solution y de (PC) définie sur J telle que $t \in J$. Alors on définit $y_{\max}(t) := y(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ est bien définie : Soient y_1 et y_2 deux solutions de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 telles que $t \in J_1 \cap J_2$. Puisque $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$. Ainsi, $y_1(t) = y_2(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ est une solution de (PC) : Soit $t \in J_{\max}$. On a $y'_{\max}(t) := y'(t) = f(t, y(t)) = f(t, y'_{\max}(t))$. Ainsi, pour tout $t \in J_{\max}$, on a $y'_{\max}(t) = f(t, y'_{\max}(t))$. En plus, $y_{\max}(t_0) := y(t_0) = y_0$.

Montrons que $y_{\max}$ est maximale : Par l'absurde, on suppose qu'il existe un prolongement $\tilde{y}$ de $y_{\max}$ définie sur $\tilde{J}$ tel que $J_{\max} \subsetneq \tilde{J}$. Mais par définition de $J_{\max}$ on a $\tilde{J} \subset J_{\max}$. Contradiction.

Montrons que $y_{\max}$ est la seule solution maximale : Par l'absurde (A faire).

Remarque 1.4.4 *Géométriquement, les graphes de deux solutions maximales de (E) sont ou bien confondus ou bien disjoints.*

Remarque 1.4.5 *Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Il suffit que f soit continue et Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur un ensemble $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ pour que le problème de Cauchy (PC) admette une solution maximale unique et une solution locale unique définie sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.*

Remarque 1.4.6 *L'unicité de la solution maximale dans le corollaire 1.4.1 veut dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions maximale de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 alors $J_1 = J_2$ et $y_1 = y_2$.*

1.5 Existence de la solution globale

On a vu dans la remarque 1.2.5 qu'ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Dans le théorème suivant, on va voir que, sous certaines conditions sur f , cela est possible :

Théorème 1.5.1 Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c, k : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t) |y|$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

Preuve 10 Voir [De]

Application : Considérons l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$. Soient $t, y \in \mathbb{R}$ avec $ty \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= \left| t\sqrt{t^2 + y^2} \right| = |t| \frac{(t^2 + y^2)}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2 + y^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{y^2}} = |t|^2 + |t| |y|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t) |y|$$

Avec c et k sont les deux fonctions continues sur $I = \mathbb{R}$ définies par $c(t) = |t|^2$ et $k(t) = |t|$. Ce qui implique que toute solution maximale de l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ est globale.

Corollaire 1.5.1 Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution globale unique.

Preuve 11 f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue alors elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t , sur $I \times \mathbb{R}$ (A faire). Puisque elle est continue sur $I \times \mathbb{R}$ alors les conditions de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées alors (PC) admet une solution maximale unique y .

D'autre part, pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}$, on a

$$|f(t, y)| \leq |f(t, 0)| + |f(t, y) - f(t, 0)| \leq |f(t, 0)| + k(t) |y - 0|.$$

Ainsi

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} \quad |f(t, y)| \leq c(t) + k(t) |y|$$

avec $c(t) = |f(t, 0)|$. D'après le théorème 1.5.1, on trouve que la solution maximale y de (PC) qui est une solution maximale de (E) est globale.

Application : Considérons l'équation $y' = a(t)y$ où a est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = a(t)y$ est continue. De plus, si $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ alors $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |a(t)| |y_1 - y_2| \leq k(t) |y_1 - y_2|$. Avec $k(t) = |a(t)| + 1$. Ici k est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Ainsi, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = a(t)y, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$
 admet une solution globale unique.

Remarque 1.5.1 On peut étendre les résultats de ce chapitre aux fonctions f définies sur des ouverts quelconques de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.6 Exercices

Exercice 1 (Résolution des équations à variables séparées)

1. Résoudre l'équation $y' = e^{-y}$.
2. Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 2 (Lemme de Gronwall)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a, b])$. On suppose que $\psi(t) \leq c + d \int_a^t \psi(u) du$ pour tout $t \in [a, b]$. On considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(t) = c + d \int_a^t \psi(u) du$. Notons que h est une fonction définie par une intégrale.