Chapitre 1

Equations du premier ordre

1.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. *Rappelons que les intervalles ouverts non vide de* $\mathbb{R}$ *sont de la forme* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\,,]a, +\infty[\,,]-\infty, b[$ et $]a, b[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire (en abrégé EDO) d'ordre* n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *est une relation entre la variable* t*, la fonction inconnue* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et ses dérivées successives par rapport à* t : $y', ..., y^{(n)}$*.On peut l'écrire comme suit*

$$\mathcal{F}\Big(\ t,\ \ y,\ \ y',\ \ \cdots,\ \ y^{(n)}\ \Big) = 0.$$

Où $\mathcal{F} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n+1}$ *sont des ouverts non vides de* $\mathbb{R}$*. Rappellons que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $x \in \Omega$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $x \in]x - \alpha, x + \alpha[\subset \Omega$.

Exemple 1 $(t^2 + 1)\, y^3 y^{(3)} + t\sqrt{y} y'' + \frac{2}{y+1} y' = 0$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 3.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n = 5$.

Définition 1.1.2 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est sous la forme normale si elle est de la forme*

$$y^{(n)} = \mathcal{G}\left(t, \quad y, \quad y', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)} \right).$$

Où $\mathcal{G} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 2 *L'équation* $y^{(4)} = y^{(3)} + y'' + y'$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 4 *sous la forme normale.*

Test : Donner une équation différentielle ordinaire d'ordre 7 sous la forme normale.

Remarque 1.1.1 *Toutes les dérivées dans les définitions ci-dessus sont par rapport à la seule variable t d'où le terme ordinaire. Si la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables alors la relation entre les variables, la fonction inconnue et ses dérivées partielles s'appelle une équation aux dérivées partielle (EDP). Par exemple, l'équation* $\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,x) = t + x$ *est une équation aux dérivées partielles.*

Dans ce cours, on s'intérresse aux équations différentielles ordinaires.

Définition 1.1.3 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle veut dire déterminer toutes ses solutions.*

Remarque 1.1.2 *En général, pour résoudre une équation différentielle, on regarde sa forme puis on trouve la classe où elle appartient et on rappelle que chaque classe a sa méthode de résolution.*

Quelques classes d'équations :

1. Equation linéaire d'ordre un : $y' + ay = b$ avec a et b deux fonctions données.
2. Equation linéaire d'ordre deux : $y'' + ay' + by = c$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et c une fonction donnée.
3. Equation à variables séparées (séparable) : $y' = p(t)\, q(y)$ avec p et q deux fonctions données.

1.2 Solution maximale et globale d'une équation du premier ordre

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *L'équation*

$$y' = f(t, y) \tag{E}$$

est appellée une équation différentielle du premier ordre (où bien d'ordre un) sous la forme normale.

Exemple 3 $y' = ty$ *est une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale. Ici,* $f(t, y) = ty$ *et* $I = \Omega = \mathbb{R}$.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale..

Définition 1.2.2 *On dit que* y *est une solution de* (E) *s'il existe un intervalle non vide* $J \subset I$ *tel que*

1. *Pour tout* $t \in J$, *on a* $y(t) \in \Omega$.
2. y *est dérivable sur* J *et vérifie* $y'(t) = f(t, y(t))$ *pour tout* $t \in J$.

Exemple 4 *Considérons l'équation* $y' = \frac{t}{y}$. *On a* $f(t, y) = \frac{t}{y}$. *Alors,* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. *On prend* $I = \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\Omega = \mathbb{R}^*$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrons que la fonction* y *définie sur* $J =]-\infty, 0[$ *par* $y(t) = t$ *est une solution de* $y' = \frac{t}{y}$ *:*

1. *Pour tout* $t \in J =]-\infty, 0[$, *on a* $y(t) = t \in \mathbb{R}^* = \Omega$.
2. y *est dérivable sur* $J =]-\infty, 0[$ *(Pourquoi). De plus, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y'(t) = 1$ *et* $\frac{t}{y(t)} = 1$. *Ainsi, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y'(t) = \frac{t}{y(t)}$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]0, +\infty[$ par $y(t) = t$ est une solution de $y' = \frac{t}{y}$.

Remarque 1.2.1 *Si* $\Omega = \mathbb{R}$ *alors la condition* 1 *dans la définition de la solution de* (E) *est toujours vérifiée.*

Exemple 5 *Considérons l'équation* $y^{'} = y^2$. *On a* $f(t,y) = y^2$. *Alors,* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *On prend* $I = \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\Omega = \mathbb{R}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrons que la fonction* y *définie sur* $J =]1, +\infty[$ *par* $y(t) = \frac{1}{1-t}$ *est une solution de* $y^{'} = y^2$ *: On a* y *est dérivable sur* $J =]1, +\infty[$ *car c'est l'inverse d'une fonction dérivable non nulle sur* $]1, +\infty[$. *De plus, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y^{'}(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ *et* $(y(t))^2 = \frac{1}{(1-t)^2}$. *Ainsi, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y^{'}(t) = (y(t))^2$.

Remarque 1.2.2 *Toute solution de* (E) *correspond à la donnée de deux éléments : un intervalle non vide* $J \subset I$ *et une fonction* $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.2.3 *Soient* $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux solutions de* (E). *Si* $J \subset \widetilde{J}$ *et* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *alors on dit que* $\widetilde{y}$ *est un prolongement de* y.

Exemple 6 *Considérons sur* $I =]0, +\infty[$ *l'équation* $y^{'} = \frac{2y}{t}$. *Soit* $y : J =]3, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une solution définie par* $y(t) = t^2$. *La solution* $\widetilde{y} : \widetilde{J} =]2, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\widetilde{y}(t) = t^2$ *est un prolongement de* y *car* $J =]3, +\infty[$ *et* $\widetilde{J} =]2, +\infty[$ *alors* $J \subset \widetilde{J}$. *Montrons que* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *: Soit* $t \in J$ *(donc* $t \in \widetilde{J}$*). Ainsi,* $y(t) = t^2 = \widetilde{y}(t)$. *C. à dire, on a montré que* $y(t) = \widetilde{y}(t)$ *pour tout* $t \in J$. *Ceci implique que* $\widetilde{y} = y$ *sur* J.

Test : On considère l'équation $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1, 1[$ par $y(t) = 0$. Montrer que la fonction $\widetilde{y}$ définie par

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} -(t+3)^2 & \text{si } t < -3, \\ 0 & \text{si } -3 \leq t \leq 2, \\ (t-2)^2 & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

est une solution qui prolonge y.

Remarque 1.2.3 *On voit que* y *prolonge* y *car* $J \subset J$ *et* $y = y$ *sur* J.

Définition 1.2.4 *Une solution* $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite solution maximale si elle n'admet aucun prolongement* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $J \subsetneq \widetilde{J}$. *C'est à dire* y *est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible (un intervalle maximale). Notons que* $J \subsetneq \widetilde{J}$ *veut dire* J *est strictement inclus dans* $\widetilde{J}$.

Exemple 7 *La fonction* y *définie sur* $J = \mathbb{R}$ *par* $y(t) = e^{-4t}$ *est une solution maximale de l'équation* $y' = -4y$ *car elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *qui est un intervalle de définition maximale.*

Lemme 1.2.1 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. *Soit* y *une solution de* (E) *définie sur* $]\alpha, +\infty[$. *Si* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ *n'existe pas alors* y *est une solution maximale.*
2. *Soit* y *une solution de* (E) *définie sur* $]-\infty, \beta[$. *Si* $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ *n'existe pas alors* y *est une solution maximale.*

Preuve 1
1. *Par l'absurde, on suppose que* y *n'est pas maximale alors elle admet un prolongement* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $]\alpha, +\infty[\subsetneq \widetilde{J}$. *Puisque* $\widetilde{J}$ *est un intervalle alors* $\alpha \in \widetilde{J}$. *D'une part,* $\widetilde{y}$ *est une solution de* (E) *alors elle dérivable sur* $\widetilde{J}$. *Ceci implique qu'elle est continue sur* $\widetilde{J}$. *Ainsi, elle est continue en* $t_0 = \alpha$. *Alors* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$. *D'autre part, on a* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *alors* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) = \lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$. *C. à dire* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) \in \mathbb{R}$. *Ceci est une contradiction avec* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ *n'existe pas.*
2. *Similaire à (1).*

Application : La fonction y définie sur $J =]-\infty, -1[$ par $y(t) = \frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$ car $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} y(t) = \lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} \frac{1}{t+1} = -\infty$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$.

Lemme 1.2.2 *Toute solution* y *de* (E) *se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$.

Preuve 2 *Voir [De]*

Remarque 1.2.4 *En général, le prolongement maximale d'une solution* y *n'est pas unique. Par exemple, on considère l'équation* $y' = 2\sqrt{|y|}$. *Soit* y *une solution définie sur* $J =]-1,1[$ *par* $y(t) = 0$. *On considère la fonction* $\widetilde{y}_1$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\widetilde{y}_1(t) = 0$ *et la fonction* $\widetilde{y}_2$ *définie par*

$$\widetilde{y}_2(t) = \begin{cases} -(t+2)^2 & \text{si } t \in]-\infty,-2[\,, \\ 0 & \text{si } t \in [-2,2]\,, \\ (t-2)^2 & \text{si } t \in]2,+\infty[\,. \end{cases}$$

1. *On a* $\widetilde{y}_1$ *est la fonction constante* 0 *définie sur* $\mathbb{R}$ *alors elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *En plus,* $\widetilde{y}_1' = 0$ *et* $2\sqrt{|\widetilde{y}_1|} = 0$ *alors* $\widetilde{y}_1' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_1|}$. *Ceci implique que* $\widetilde{y}_1$ *est une solution de* $y' = 2\sqrt{|y|}$. *Montrons que* $\widetilde{y}_1$ *est maximale : Puisque* $\widetilde{y}_1$ *est définie sur* $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ *qui représente l'intervalle de définition le plus grand possible alors elle est maximale. Montrons que* $\widetilde{y}_1$ *est un prolongement de* y : *On a* $J =]-1,1[$ *et* $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ *alors* $J \subset \widetilde{J}_1$. *D'autre part, pour tout* $t \in J$ *(donc* $t \in \widetilde{J}_1$*), on a* $\widetilde{y}_1(t) = 0 = y(t)$.

   Conclusion : $\widetilde{y}_1$ *est une solution maximale qui prolonge* y.

2. *Montrons que* $\widetilde{y}_2$ *est aussi une solution maximale qui prolonge* y : *Notons au début que* $\widetilde{J}_2 =]-\infty,-2[\cup [-2,2] \cup]2,+\infty[= \mathbb{R}$.

   (a) *Sur* $]-\infty,-2[$: $\widetilde{y}_2(t) = -(t+2)^2$ *alors elle est dérivable sur* $]-\infty,-2[$. *De plus, pour tout* $t \in]-\infty,-2[$, *on a* $\widetilde{y}_2'(t) = -2(t+2)$ *et* $2\sqrt{|\widetilde{y}_2|} = -2(t+2)$ *(car* $t+2 < 0$*). Alors* $\widetilde{y}_2' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ *sur* $]-\infty,-2[$.

   (b) *De même, on montre que* $\widetilde{y}_2$ *est une fonction dérivable sur* $]-2,2[$ *(resp. sur* $]2,+\infty[$*) et elle vérifie* $\widetilde{y}_2' = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ *sur* $]-2,2[$ *(resp. sur* $]2,+\infty[$*).*

   (c) *Au point* $t = -2$: *On a*

$$\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t) - \widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = \lim_{\substack{t \overset{<}{\longrightarrow} -2 \\ \neq}} \frac{-(t+2)^2}{t+2} = \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} -2} -(t+2) = 0.$$

De même, on trouve $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t)-\widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = 0$. *Ce qui implique que* $\widetilde{y}_2$ *est dérivable au point* $t = -2$. *En plus, on a* $\widetilde{y}_2^{'}(-2) = 0$. *Mais,* $2\sqrt{|\widetilde{y}_2(-2)|} = 0$ *alors* $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ *pour* $t = -2$.

(d) *Au point* $t = 2$: *De même, on montre que* $\widetilde{y}_2$ *est dérivable au point* $t = 2$. *En plus,* $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ *pour* $t = 2$.

Ainsi, $\widetilde{y}_2$ *est une solution de* $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$.

D'autre part, on peut montrer que $\widetilde{y}_2$ *est maximale et elle prolonge* y *(A faire).*

Définition 1.2.5 *Si la solution* y *de* (E) *est définie sur tout* I *(ie.* $J = I$*) alors on dit que* y *est une solution globale.*

Exemple 8 *La fonction nulle définie sur* $\mathbb{R}$ *est une solution globale de l'équation* $y^{'} = y$ *car elle est une solution définie sur tout* $I = \mathbb{R}$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = 2y$.

Lemme 1.2.3 *La solution globale est une solution maximale.*

Preuve 3 *La solution globale est définie sur l'intervalle tout entier qui est l'intervalle de définition le plus grand possible. Ceci implique qu'elle est une solution maximale.*

Application : La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = y^2$ alors elle est une solution maximale.

Test : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = 2y$

Remarque 1.2.5 *Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Par exemple, la fonction* y *définie sur* $J =]-\infty, -1[$ *par* $y(t) = \frac{1}{t+1}$ *est une solution maximale de l'équation* $y^{'} = -y^2$ *(voir l'exemple ci-dessus) mais elle n'est pas globale car* $J =]-1, +\infty[$ *et* $I = \mathbb{R}$ *alors* $J \neq I$. *C. à dire, elle n'est pas définie sur tout* I.

1.3 Existence de la solution du problème de Cauchy

1.3.1 Problème de Cauchy

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$.

Définition 1.3.1 *L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appelée une condition initiale de l'équation (E).*

Définition 1.3.2 *Le problème*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{PC}$$

est appellé problème de Cauchy.

Exemple 9 *Le problème* $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ *est un problème de Cauchy.*

Définition 1.3.3 *$y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du (PC) si elle est une solution de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.4 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution maximale du (PC) si elle est une solution maximale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.5 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution globale du (PC) si elle est une solution globale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

1.3.2 Théorème de Cauchy-Piano-Arzela

Théorème 1.3.1 *(Théorème de Cauchy-Piano-Arzela) On suppose que f est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (PC) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$, $M := \sup_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$ et $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$. Cette solution est appelée solution locale.*

Preuve 4 *La démonstration est basée sur la construction des solutions approchées par la méthode d'Euler. Pour plus de détails voir* $[De]$.

Application : Montrons que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *admet une solution locale définie sur* $[-T, T]$ où T est donné dans le théorème de Cauchy-Piano-Arzela *:* La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Si par exemple, on prend $T_0 = \frac{1}{2}$ et $r_0 = 1$ alors

$$C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$$

et

$$\begin{aligned} M &= \sup_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} \left|t^2 + e^{-y^2}\right| \\ &= \max_{(t,y)\in C} \left(t^2 + e^{-y^2}\right) = \frac{1}{4} + e^{-0^2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution locale définie sur $[-T, T] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ à valeur dans $[-r_0, r_0] = [-1, 1]$.

Remarque 1.3.1 *Soient* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ *et* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. *De tels* T_0 *et* r_0 *existent. En effet,* I *est un intervalle ouvert alors il est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Puisque* $t_0 \in I$ *alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $t_0 \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\subset I$ *alors il suffit de prendre* $T_0 < \alpha$ *pour que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ *ce qui implique que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$. *De même, pour* r_0.

Remarque 1.3.2 *Si* f *est continue sur* $I \times \Omega$ *alors elle est continue sur* $C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times$

$[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ce qui implique que* $M := \sup_{(t,y)\in C} |f(t,y)|$ *existe car toute fonction continue sur un compacte d'un espace métrique est bornée et elle atteint ses bornes. Ici* C *est un compacte de* $\mathbb{R}^2$ *car* C *est borné et fermé de* $\mathbb{R}^2$. *On a aussi* $M > 0$ *car on prend* f *une fonction non nulle.*

Lemme 1.3.1 *Si* f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale.*

Preuve 5 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, d'aprés le théorème de Cauchy-Piano-Arzela, le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution locale* y. *Cette solution est une solution de* (E) *donc elle se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$ *de* (E). *Puisque* $\widetilde{y} = y$ *sur* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ *alors* $\widetilde{y}(t_0) = y(t_0) = y_0$. *Ainsi,* $\widetilde{y}$ *est une solution maximale de* (PC).

Remarque 1.3.3 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. *Il suffit que* f *soit continue sur un ensemble* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *pour que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale et une solution locale définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

1.4 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Ils existent des problèmes de Cauchy qui admettent plus qu'une solution maximale. Par exemple, le problème $\begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet les deux solutions maximales y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$. Ainsi, la continuité de la fonction f est une condition insuffisante pour avoir l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. On va voir ci-aprés que si f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors on a l'unicité de la solution maximale.