Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentales 2016/2017

Matière : *Équations aux différences* Durée : 1h 30m
Responsable : *Y. Halim*

Examen de Rattrapage
03 Avril 2017

Exercice 1 : (5 Pts)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}+1}{x_n x_{n-1}-1}, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

avec les conditions initiales x_0 et x_{-1}.

1. Montrer que la solution de l'équation (1) est périodique de période 5.
2. Déduire la forme de solution de l'équation (1).

Exercice 2 :(5 Pts)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

avec α, x_0 et $x_{-1} \in]0, +\infty[$.

1. Déterminer les points d'équilibres de l'équation (2).
2. Étudier la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre pour $\alpha > 1$.
3. Que direz vous pour le cas $0 < \alpha < 1$.

Exercice 3 :(10 Pts)

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \alpha x_{n-1}}{\beta + x_n} \tag{3}$$

avec $\alpha > 0, \beta > 0, x_{-1}, x_0 \geq 0$.

1. Soit $\beta < 1 + \alpha$, donner la formule du seul point d'équilibre strictement positive $\overline{x}$ de (3).
   Il est claire que $\overline{y} = 0$ est toujours point d'équilibre de (3).
2. Donner une condition (sur α et β) suffisante pour la stabilité locale assymptotique du point d'équilibre $\overline{x}$. Même question pour le point d'équilibre $\overline{y} = 0$.
3. Supposons que $\alpha < \beta < 1 + \alpha$. Montrer que si $x_{-1}, x_0 \leq \frac{\beta}{\alpha}$, alors $\left[0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$ est un intervalle invariant pour (3).
4. Montrer que si $\beta - \alpha \neq -1$, alors (3) n'admet pas de solutions positives périodiques de période 2.