## Première partie

# Introduction aux systèmes de contrôle

Le but de cette partie est de donner une brève introduction à la théorie du contrôle, d'en donner une définition et de décrire ses objets d'études.

La théorie du contrôle est une branche de la théorie des systèmes qui a pour objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle. Le but étant alors d'amener le système d'un état initial à un état final en respectant un certain cahier des charges (stabilité, rapidité, performances,...).

**Définition 1** (***Système de contrôle***)

*Un système de contrôle est un système dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système par le biais d'un contrôle (ou commande).*

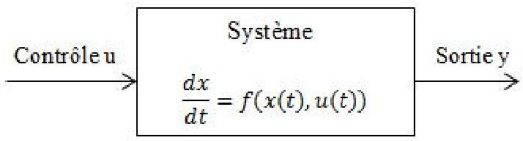


FIGURE 1 – Schéma d'un système de contrôle.

On considère un système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $x : t \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ désigne l'*état* et $u : t \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ le *contrôle*, $n$ et $m$ étant deux entiers naturels non-nuls.

**Définition 2** (***Trajectoire***)

*On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière $t \in I \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait (1) sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non vide.*

On rappelle la définition d'un point d'équilibre du système (1)

**Définition 3**

*On appelle point d'équilibre du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ un couple*

*$(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant*

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Les objectifs principaux de la théorie du contrôle que l'on va aborder dans la suite sont les notions de contrôlabilité et de stabilisation. Nous allons aussi aborder brièvement la notion de contrôle optimal.

Parmi les systèmes de contrôle, on distingue les systèmes de contrôle linéaires, qui sont de la forme $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, des systèmes de contrôle non linéaires, de la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. En toute rigueur, les systèmes de contrôle réels, présents dans la nature, sont non linéaires, mais si l'on se place dans ce contexte l'étude est beaucoup plus complexe. C'est pour cela que l'on a rapidement tendance à linéariser un système dès que l'on peut le faire.

## Deuxième partie

# Existence et unicité des solutions

Avant d'étudier les notions clés abordées ci-dessus, il faut avant tout s'assurer que les systèmes que nous étudions admettent des solutions et qu'elles sont uniques. Pour cela, le théorème de Cauchy usuel ne suffit pas toujours, c'est ce que nous allons voir.

Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f$ une application de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$.
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Le théorème de Cauchy usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que $f$ soit continue, et localement lipschitzienne par rapport à $x$. Mais en théorie du contrôle ces hypothèses doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles non continus (aux mieux continus par morceaux), et par conséquent la continuité du second membre n'est plus assurée.

**Définition 4 (*Solution du problème de Cauchy*)**

*On se place sous les hypothèses suivantes :*

— *$\forall t \in I$, $x \to f(t, x)$ est mesurable,*

— *$\forall x \in \Omega$, $t \to f(t,x)$ est continue.*

*On appelle solution du problème de Cauchy (2) tout couple $(J,x)$, où $J \subset I$ est un intervalle tel que $t_0 \in J$, et où $x : J \to \Omega$ est une application absolument continue telle que pour tout $t \in J$*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

*Une solution $(J,x)$ est dite maximale si pour tout autre solution $(\tilde{J},\tilde{x})$, on a $\tilde{J} \subset J$ et $x = \tilde{x}$ sur $\tilde{J}$*

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 5 (*Cauchy-Lipschitz*)**

*Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $v$ une application de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

— *v est localement lipschitzienne par rapport à x : pour tout compact $K \subset I \times \Omega$, il existe $L > 0$ tel que*

$$\| v(t,x_1) - v(t,x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \| \ , \forall (t,x_1), (t,x_2) \in K,$$

*v est localement intégrable par rapport à $t$ : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\eta \in L^1_{loc}(I,\mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $t \in I$, $\| v(t,x) \| \leq \eta(t)$*

*Alors pour toute condition initiale $(t_0,x_0) \in I \times \Omega$, il existe une unique solution maximale $(J,x)$ au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(x,t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Si l'on reprend le système de contrôle (1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

il suffit alors de supposer que pour chaque contrôle $u$, la fonction $F : (t,x) \to f(t, x(t), u(t))$ vérifie les hypothèses du théorème 5.

On considère dans la suite le système de contrôle *linéaire* suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

où A et B sont deux applications localement intégrables sur $I$, à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ .

L'ensemble des contrôles $u$ considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur $I$, à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Le théorème 5 nous assure que, pour tout contrôle $u$, le système (3) admet une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ absolument continue.

Soit $M : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x} = A(t)x(t)$, définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$ (si $A(t)$ est constante, alors $M(t) = exp(tA)$).

**Prop 6**

*Soient un contrôle $u$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ valant $x_0$ à l'instant $t = 0$ est*

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

**Remarque 1.** *On remarque que l'application $x$ dépend de $u$. Si on change le contrôle $u$, on obtient une autre trajectoire $t \mapsto x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$.*

On a vu qu'il existait sous certaines hypothèses des contrôles tels que le système (3) admette des solutions. La question qui se pose à présent est de savoir si pour un certain état $x_1$ de $\mathbb{R}^n$, s'il existe un contrôle $u$ telle que la trajectoire associée à ce contrôle amène le système de l'état $x_0$ à l'état $x_1$ en un temps fini $T$. C'est ce qu'on appelle le problème de contrôlabilité.

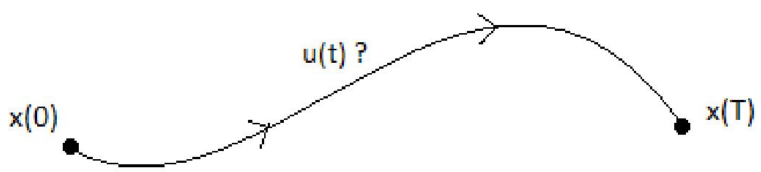


FIGURE 2 – Problème de contrôlabilité.

Troisième partie

# Contrôlabilité d'un système

## 1 Contrôlabilité d'un système non linéaire

Dans cette partie, on considère à nouveau le système de contrôle non linéaire (1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

**Définition 7** (***Ensemble accessible***)

*L'ensemble des points accessibles à partir de $x_0$ en un temps $T$>0 est défini par : $Acc(x_0, T) := \{x_u(T)/u \in L^\infty([0,T], \Omega)\}$, où $\Omega$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$.*
*$x_u$ est la solution du système (1) associée au contrôle $u$.*

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1) au temps T lorsqu'on fait varier le contrôle $u$.

**Définition 8** (***Contrôlabilité***)

*Le système (1) est dit contrôlable en temps $T$>0 si, et seulement si, $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$.*
*Autrement dit, pour tous états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u$ qui amène le système de l'état $x(0) = x_0$ à l'état $x(T) = x_1$,* ie, *tel que la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*vérifie $x(T) = x_1$.*

On définit à présent la notion de système localement contrôlable en un point d'équilibre.

**Définition 9** (***Contrôlabilité locale***)

*Soit $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point d'équilibre du système de contrôle (1). On dit alors que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre $(x_e, u_e)$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x_0, x_1 \in B_\eta(x_e) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_e| < \eta\}$, il existe une application mesurable $u : [0, \epsilon] \to \mathbb{R}^m$ telle que*

$$|u(t) - u_e(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \epsilon],$$
$$(\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0) \Rightarrow x(\epsilon) = x_1$$

Le théorème suivant permet de déduire des résultats de contrôlabilité locale à partir de l'étude du système linéarisé. Ce résultat se déduit du théorème de contrôlabilité des systèmes linéaires 15 que nous allons étudier dans la suite.

Avant d'énoncer le théorème, on définit ce qu'est le système linéarisé en un point d'équilibre d'un système de contrôle.

**Définition 10 (*Système linéarisé*)**

*Soit $(x_e, u_e)$ un point d'équilibre du système (1). Le système de contrôle linéarisé au point $(x_e, u_e)$ du système $\dot{x} = f(x, u)$ est le système de contrôle linéaire*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u(t)$$

**Théorème 11 (*Linear test*)**

*On considère le système (1) avec $f(x_e, u_e) = 0$. On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$. On suppose que*

$$rg([B, AB, ..., A^{n-1}B]) = n$$

*Alors le système est localement contrôlable en $(x_e, u_e)$.*

$\triangleright$ $\square$

On introduit la notion d'intégrale première qui donne une condition sur la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

**Définition 12 (*Intégrale première*)**

*Une fonction régulière $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système (1) si elle est constante le long de toute trajectoire du système.*
*Une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

**Remarque 2.** *Si $h$ est une intégrale première, sa dérivée le long d'une trajectoire arbitraire du système est nulle. Autrement dit*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0$$

**Prop 13**

*Si le système (1) admet une intégrale première non triviale, alors il n'est pas contrôlable.*

$\triangleright$ Supposons que (1) admette une intégrale première non triviale et soit contrôlable. Alors il existe $T > 0$ tel que pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ et tout instant initial $t$, une trajectoire reliant $x_0$ à $x_1$ sur $[t, t+T]$. Autrement dit $h(t, x_0) = h(t+T, x_1)$.
$h$ est donc une fonction périodique du temps et indépendante de $x$. La dérivée de h le long des trajectoires du système se réduit alors à $\dfrac{\partial h}{\partial t}$. Par la remarque précédente, cette dérivée est nulle. $h$ est donc une constante ce qui contredit l'hypothèse de départ. $\square$

## 2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

On considère à présent un système de contrôle linaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où $A$ est de taille $n \times n$ et $B$ de taille $n \times m$.

Si $A$ et $B$ ne dépendent pas du temps $t$, on a une caractérisation algébrique de la contrôlabilité.

**Théorème 14 (*Matrice de Kalman*)**

*L'espace $Acc(0, T)$ est égal à l'image de la matrice $C := [B, AB, ..., A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$, appelée matrice de Kalman.*

**Remarque 3.** *L'ensemble des points accessibles à partir de 0 en temps $T$ est indépendant de $T$.*

**Corollaire 15 (*Critère de contrôlabilité de Kalman*)**

*Le système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps $T$ (quelconque) si, et seulement si, la matrice de Kalman est de rang $n$.*

**Remarque 4.** *La condition de Kalman ne dépend ni de $T$ ni de $x_0$. Autrement dit, si un système linéaire est contrôlable en temps $T$ depuis $x_0$, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Preuve du théorème 14 :
$\triangleright$ On remarque que

$$\begin{aligned} Im(C) &= \mathcal{R}(A, B) \\ &:= Vect(A^i Bz\,;\, i = 0, ..., n-1,\ z \in \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

Montrons que $Acc(0, T) \subset \mathcal{R}(A, B)$. Par définition, si $x \in \mathcal{R}(A, B)$, alors il existe un contrôle $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ tel que $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de $A$

annule $A$. Or ce polynôme est un polynôme normalisé (*ie*, le coefficient de plus haut degré vaut 1) de degré $n$, ce qui implique que $A^n$ est une combinaison linéaire de $I, ..., A^{n-1}$ (nb : $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n detA$). Par conséquent, pour tout $j \geq 0$, $A^j$ est une combinaison linéaire de $I, ..., A^{n-1}$ et laisse donc invariant l'espace vectoriel $\mathcal{R}(A, B)$.
D'autre part, pour tout $s \in [0, T]$, $e^{(t-s)A)}$ admet le développement suivant :

$$e^{(t-s)A} = I + (t-s)A + ... + \frac{(t-s)^k A^k}{k!} + ...$$

$e^{(t-s)A)}$ laisse donc également invariant l'espace $\mathcal{R}(A, B)$. On a donc montré que pour tout $s \in [0, T]$, $e^{(t-s)A)}Bu(s) \in \mathcal{R}(A, B)$.

On a prouvé que $Acc(0, T) \subset \mathcal{R}(A, B)$. Montrons l'inclusion réciproque $\mathcal{R}(A, B) \subset Acc(0, T)$. Pour cela montrons que $Acc(0, T)^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$.
Soient $w \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à $Acc(0, T)$ et l'état $\tilde{w}$ que l'on peut atteindre au temps $T$ par le contrôle $u(t) = B^\top (e^{(T-s)A)})^\top w$. Le vecteur $w$ est donc orthogonal à l'état $\tilde{w}$.
Par une formule précédente, on a

$$\tilde{w} = \int_0^t e^{(t-s)A} BB^\top (e^{(t-s)A})^\top w ds$$

et comme $< w, \tilde{w} >= 0 >$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, \int_0^t e^{(t-s)A} BB^\top (e^{(t-s)A})^\top w ds \rangle \\ &= \int_0^t ((e^{(t-s)A}B)^\top w)^\top ((e^{(t-s)A}B)^\top w) ds, \end{aligned}$$

*ie*, pour tout $s \in [0, T]$, $(e^{(t-s)A}B)^\top w = 0$.
En dérivant $n-1$ fois cette égalité par rapport à $s$, on obtient

$$(e^{(t-s)A}AB)^\top w = (e^{(t-s)A}A^2B)^\top w = ... = (e^{(t-s)A}A^{n-1}B)^\top w = 0$$

en prenant s=t, on obtient $B^\top w = (A^2B)^\top w = ... = (A^{n-1}B)^\top w = 0$. Ceci s'écrit encore :

$$\begin{gathered} \forall j \in 0, ..., n-1, \forall z \in \mathbb{R}^m, \\ 0 =< z, (A^jB)^\top w >=< A^jBz, w > \end{gathered}$$

*ie*, $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$. On a donc démontré l'inclusion réciproque. □

# 3 Systèmes semblables

Dans cette partie, on introduit la définition de systèmes semblables qui nous permet d'étudier la contrôlabilité d'un système en se ramenant à un système que l'on sait contrôlable.