Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentales 2016/2017

Matière : *Équations aux différences* Durée : 1h 30m
Responsable : *Y. Halim*

Examen Final

Exercice 1 : (4 Pts)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n x_{n-1} - 1}, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

avec les valeurs initiales x_0, x_{-1}..

1. Montrer que la solution de l'équation (1) est périodique de période 3.
2. Déduire la forme de solution de l'équation (1).

Exercice 2 :(6 Pts)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{r x_{n-1}}{1 + x_n}, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

avec x_0 et $x_{-1} \in [0, +\infty[$ et $r > 0$.

1. Déterminer les points d'équilibres de l'équation (2).
2. Montrer que si $r < 1$, alors $\overline{x} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 3 :(10 Pts)

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{a x_n + b x_{n-1}}{b x_n + a x_{n-1}} \tag{3}$$

et $a, b, x_{-1}, x_0 \in]0, +\infty[$, $a > b$.

1. Vérifier que $x_n \in]0, +\infty[, n = 1, 2, \ldots$
2. Montrer que l'équation (3) admet un seul point d'équilibre, qu'on le note $\overline{x}$ (donner sa valeur).
3. Montrer que si $\frac{2(a-b)}{a+b} < 1$, alors $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.
4. Montrer que $x_n \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right], n = 1, 2, \ldots$
5. Soit $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$. Étudier la monotonie de la fonction f par rapport au deux variables.
6. Montrer que si $\frac{2(a-b)}{a+b} < 1$, $b^2 + 2ab - a^2 \geq 0$ et $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable.