المحاضرة الرابعة:

توزيعات المعاينة عند مجتمعات التوزيع الطبيعي

ثالثا: توزيعات المعاينة عند مجتمعات التوزيع الطبيعي:

1- توزيع الوسط الحسابي للمعاينة:

لو أخذنا جميع العينات الممكنة التي حجمها (n) من مجتمع حجمه(N) وحسبنا أوساطها نجد أن هذه الأوساط قد تختلف، مما يعني أن سلوك هذه الأوساط هو سلوك متغير عشوائي يرمز له بالرمز$(\overline{X})$، و بالتـــالي هذا المتغير العشوائي له توزيع احتمالي مستمداً من توزيع المجتمع الذي سُحبت منه العينات يسمى توزيع الوسط الحسابي للعينة، وسنذكر في هذا الفصل بعض الحالات المختلفة للتوزيع وكيفية حساب الإحتمالات لهذا المـــتغير العشوائي، وسنذكر بعض النظريات الهامة بدون برهان والمتعلقة بهذا التوزيع.

- توقع المتغير العشوائي $(\overline{X})$ والذي يرمز له بالرمز $(\mu_{\overline{X}})$ هو:

$$E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$$

حيث أن: μ : وسط المجتمع.

- إذا كان لدينا مجتمعاً غير محدود الحجم (غير منتهي) أو محدود الحجم (منتهي)، و كان السحب منه بالإرجاع، فإن تباين توزيع الوسط الحسابي للعينة والذي يرمز له بالرمز $(\sigma_{\overline{X}}^2)$ معطى بالعلاقة:

$$E[(\overline{X} - \mu)^2] = \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

حيث أن: σ^2 هو تباين المجتمع و n : حجم العينة.

ملاحظات:

- يُطلق على الإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة اسم الخطأ المعياري (Standard Error)؛
- إذا كان حجم المجتمع محدود و كان السحب منه بالإرجاع، فيعتبر المجتمع هذا غير منتهي.
- إذا كان حجم المجتمع محدود قيمته (N)، وكان السحب بدون ارجاع وكان حجم العينة $(n \leq N)$ فإن:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- إذا كان لدينا مجتمعاً بوسط (μ) وتباين (σ^2) فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع يكون:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

مثال(1): عينة إحصائية تتكون من ثلاث مشاهدات $(n=3)$ هي (4، 6، 2)، تم اختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع $(n=2)$ مع الإرجاع.

المطلوب: I- أحسب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2)؛

II- سحب كافة العينات الممكنة بحجم $(n=2)$ مع الإرجاع؛

III- أحسب الوسط الحسابي $(\overline{X})$ لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري؛

IV- أحسب متوسط المتوسطات $(\mu_{\overline{X}})$ والتباين $(\sigma^2_{\overline{X}})$؛

V- مقارنة النتائج المحسوبة في المطلوب (IV) مع النتائج المحسوبة في الفرع (I)؛

الحل:

1- حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2):

إن كل قيمة من قيم المجتمع الإحصائي لها نفس الفرصة في الظهور، وعليه يكون دالة التوزيع الإحتمالي P(X) كما يلي:

$$P(X_i)=\frac{1}{3} \qquad ; \; X_i=2, 6, 4$$

وعليه يكون:

$$\mu=E(X_i)=\sum_{i=1}^{3}X_i.P(X_i)=X_1P(X_1)+X_2P(X_2)+X_3P(X_3)$$

$$=2.\left(\frac{1}{3}\right)+6.\left(\frac{1}{3}\right)+4.\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}[2+6+4]=4$$

ويمكن حساب متوسط المجتمع (μ)كمايلي:

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{N}=\frac{2+6+4}{3}=4$$

حساب تباين المجتمع (σ^2):

$$\sigma^2=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\sum_{i=1}^{3}X_i.P(X_i)-\mu^2=\left[2^2\left(\frac{1}{3}\right)+6^2\left(\frac{1}{3}\right)+4^2\left(\frac{1}{3}\right)\right]-(4)^2=\frac{8}{3}$$

وكذلك يمكن حساب التباين(σ^2):

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2}{N}=\frac{(2-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

2- عدد العينات الممكنة بحجم $(n=2)$ مع الإرجاع:

عدد العينات: $N^n=(3)^2=9$ وذلك كما هو موضح في الجدول:

العينات	2	6	4
2	(2،2)	(6،2)	(4،2)
6	(2،6)	(6،6)	(4،6)
4	(2،4)	(6،4)	(4،4)

3- حساب الوسط الحسابي ($\overline{X}$) لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري:

العينات	(2،2)	(2،6)	(4،2)	(6،2)	(6،6)	(6،4)	(4،2)	(4،6)	(4،4)
$\overline{X}$	2	4	3	4	6	5	3	5	4

تلخيص نتائج الوسط الحسابي ($\overline{X}$) في جدول تكراري:

$\overline{X}$	f	$\overline{X}f_i$	$\overline{X}^2f_i$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
$\sum$	9	36	156

4- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) والتباين ($\sigma^2_{\overline{X}}$):

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}f_i}{\sum f_i} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2_{\overline{X}} = \frac{156}{9} - 4^2 = \frac{4}{3}$$

5- مقارنة النتائج المحسوبة:

- إن متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) يساوي متوسط المجتمع (μ) أي أن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 4$$

- إن تباين الوسط الحسابي ($\sigma^2_{\overline{X}}$) هو عبارة عن تباين المجتمع (σ^2) مقسوماً على حجم العينة ($n = 2$) أي أن:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{2} = \frac{4}{3}$$

وبمقارنة النتائج السابقة يمكن أن نستخلص بأن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

مثال(2): عينة إحصائية تتكون من ثلاث مشاهدات ($N = 3$) هي (1، 3، 2)، تم اختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع ($n = 2$) بدون إرجاع.

المطلوب: I - حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2)؛

II- سحب كافة العينات الممكنة بحجم ($n = 2$)بدون إرجاع مع حساب الوسط الحسابي ($\overline{X}$) لكل عينة وتلخيص النتائج في جدول تكراري؛

III- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) والتباين ($\sigma^2_{\overline{X}}$)؛

IV- مقارنة النتائج المحسوبة في الفرع (III) مع الفرع (I).

الحل:

1- حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2):

إن كل قيمة من قيم المجتمع الإحصائي لها نفس الفرصة في الظهور، وعليه تكون دالة التوزيع الإحتمالي P(X) كما يلي:

$$P(X_i) = \frac{1}{3} \qquad ; \; X_i = 1, 3, 2$$

وعليه يكون:

$$\mu = E(X_i) = \sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i) = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + X_3P(X_3)$$

$$= 1.\left(\frac{1}{3}\right) + 3.\left(\frac{1}{3}\right) + 2.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}[1 + 3 + 2] = 2$$

حساب تباين المجتمع(σ^2):

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i.P(X_i) - \mu^2 = \left[1^2\left(\frac{1}{3}\right) + 2^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3^2\left(\frac{1}{3}\right)\right] - (2)^2 = \frac{2}{3}$$

2- عدد العينات الممكنة بحجم ($n = 2$) بدون إرجاع:

يمكن سحب كافة العينات الممكنة بحجم ($n = 2$) بدون إرجاع وفقا للصيغة التالية:

$$\sum f_i = C_n^N = C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

إذن تكون كافة العينات الممكنة والبالغة (3) عينات موضحة كالآتي:

العينات	(3،1)	(2،1)	(2،3)

ومنه يمكن حساب الوسط الحسابي ($\overline{X}$) كمايلي:

العينات	(3،1)	(2،1)	(2،3)
$\overline{X}$	2	1.5	2.5

تلخيص نتائج الوسط الحسابي ($\overline{X}$) في جدول تكراري:

$\overline{X}$	f	$\overline{X}f_i$	$\overline{X}^2f_i$
1.5	1	1.5	2.25
2.0	1	2.0	4.00
2.5	1	2.5	6.25
$\sum$	$\sum f_i = C_n^N$	6	12.5

3- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) والتباين ($\sigma^2_{\overline{X}}$):

$$-\mu_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}f_i}{\sum f_i} = \frac{6}{3} = 2$$

$$-\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2_{\overline{X}} = \frac{12.5}{3} - 2^2 = \frac{1}{6}$$

4- مقارنة النتائج المحسوبة في (3) مع (1):

عند مقارنة النتائج يتضح لنا:

- إن متوسط المتوسطات ($\mu_{\overline{X}}$) يساوي متوسط المجتمع (μ) أي أن:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 4$$

- إن تباين الوسط الحسابي ($\sigma^2_{\overline{X}}$) هو عبارة عن تباين المجتمع (σ^2) مقسوماً على حجم العينة ($n = 2$) و مضروباً في المقدار $\frac{(N-n)}{N-1}$ الذي يمثل عامل التصحيح (معامل الإرجاع) في حالة كون حجم المجتمع صغير وكان السحب بدون إرجاع:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \frac{1}{6}$$

وبمقارنة النتائج السابقة يمكن ان نستخلص ما يأتي:

$$* \mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$* \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

2- حالات مختلفة لإيجاد توزيع الوسط الحسابي للعينة:

2-1- إذا كان تباين المجتمع معلوم:

إذا كان: $X \sim N(\mu , \sigma^2)$ ، وسُحبت منه عينة حجمها (n) فإن توزيع الوسط الحسابي للعينة هو:

$$\overline{X} \sim N(\mu , \frac{\sigma^2}{n})$$

ولحساب الإحتمالات للمتغير العشوائي$(\overline{X})$ يتم إيجاد القيم المعيارية له حيث:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0 , 1)$$

مثال: إذا كان لدينا $X \sim N(9 , 4)$،

المطلوب: ما هو التوزيع الإحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم 25 من مجتمع(X)، ثم أحسب $P(x \geq 10)$؟.

الحل:

لدينا: $X \sim N(9 , 4)$ ومنه فإن: $\overline{X} \sim N(9 , \frac{4}{25})$

ولحساب الإحتمال المطلوب، لاحظ أن: $Z = \frac{\overline{X} - 9}{2/\sqrt{25}} = \frac{\overline{X} - 9}{0.4} \sim N(0,1)$

وبالتالي يكون الإحتمال المطلوب:

$$P(\overline{X} \geq 10) = P\left(\frac{\overline{X} - 9}{2/\sqrt{25}} \geq \frac{10 - 9}{2/5}\right) = P(Z \geq 2.5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

2-2- إذا كان تباين المجتمع الطبيعي مجهول:

في هذه الحالة نقدر تباين المجتمع بتباين العينة المسحوبة منه بين حالتين:

2-2-1- عندما يكون حجم العينة: $n \geq 30$:

يكون توزيع الوسط الحسابي للعينة هو:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu , \frac{S^2}{n}\right)$$

حيث أن: S^2 هو تباين العينة ويحسب من العلاقة $S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}$، التوزيع المعياري المقابل هو:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

مثال: إذا كان $X \sim N(7,\sigma^2)$.

المطلوب: ماهو التوزيع الإحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم 36 من مجتمع X تباينها 9؟؛ ثم أحسب $P(\bar{x} \geq 8)$؟

الحل:

لدينا تباين المجتمع مجهول فإن: $X \sim N(\mu,\frac{S^2}{n}) = N(7,\ \frac{9}{36})$

ولحساب الإحتمال المطلوب لاحظ أن: $Z = \frac{\bar{X}-7}{3/\sqrt{36}} = \frac{\bar{X}-7}{0.5} \sim N(0\,,1)$

وبالتالي يكون الإحتمال المطلوب:

$$P(\bar{X} \geq 8) = P\left(Z \geq \frac{8-7}{0.5} \right) = 1-P(Z \leq 2) = 1-0.9772 = 0.0228$$

2-2-2- عندما يكون حجم العينة ($n < 30$):

يكون توزيع الوسط الحسابي للعينة هو:

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{\ (n-1)}$$

ملاحظة: إذا كانت عينة حجمها كبير فإننا نقصد أن حجمها أقل من 30 مشاهدة، وعندما نقول عينة حجمها صغير فإننا نقصد أن حجمها أقل من 30 ما لم نوضح عكس ذلك.

مثال: إذا كان $X \sim N(8.5,\sigma^2)$؛

المطلوب: أوجد التوزيع الإحتمالي لوسط العينة{8، 5، 7، 8، 8، 9، 10، 9}، ثم أحسب $P(7 < \bar{x} < 9)$

الحل:

بما أن تباين مجتمع (X) مجهول وحجم العينة ($n = 9$) وهو أقل من 30 يكون توزيع الوسط الحسابي للعينة هو: $\bar{X} \sim t_{(8)}$، و لحساب الإحتمال المطلوب نجد أولا تباين العينة كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{72}{9} = 8$$

$$S^2 = \frac{\sum (x-8)^2}{8} = 2$$

وبالتالي يكون التوزيع :

$$T = \frac{\overline{X} - 8.5}{1.414/\sqrt{8}} \sim t_{(8)}$$

ويكون الإحتمال المطلوب:

$$P(7 < \overline{x} < 9) = P\left(\frac{7 - 8.5}{1.414/\sqrt{8}} < \frac{\overline{X} - 8.5}{1.414/\sqrt{8}} < \frac{9 - 8.5}{1.414/\sqrt{8}}\right)$$
$$= P(-3 < T < 1)$$
$$= P(T < 1) - P(T < -3)$$

وحيث أن التوزيع متماثل حول الصفر، إذن $P(T < -3) = P(T > 3)$ ومن قوانين الإحتمالات نعلم أن:
$P(T < 1) = 1 - P(T > 1)$ لذلك يكون المطلوب:

$$P(7 < \overline{x} < 9) = 1 - P(T > 1) - P(T > 3)$$
$$= 1 - 0.1 - 0.01 = 0.89$$