المحاضرة الثانية: المتغير العشوائي المتصل (المستمر) و توزيعاته الإحتمالية

2- المتغير العشوائي المتصل (المستمر) و توزيعاته الإحتمالية:

2-1- تعريف المتغير العشوائي المتصل:

هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له غير قابل للعد، أي أن قيم المتغير العشوائي (X) تأخذ الشكل التالي:

$$X \in (a,b) \subset R$$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات ما يأتي:

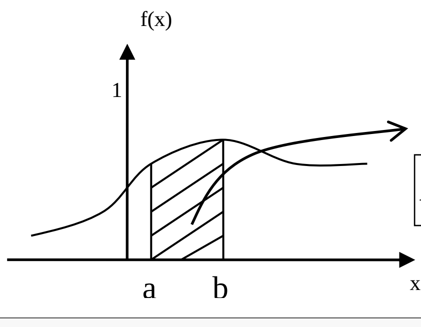
- أطوال أو أوزان مجموعة من الطلبة؛
- كمية الأمطار الساقطة على مدينة جيجل في شهر يناير؛
- الدخل الشهري لمجموعة من الأسر.

2-2- التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتصل:

إن التوزيع الإحتمالي لهذا النوع من المتغيرات لا يمكن تمثيله على غرار حالة المتغير العشوائي المنفصل، بل يعبر عن التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي بدالة احتمال مستمرة، تسمى دالة الكثافة الإحتمالية، وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين:

$$\begin{cases} f(X_i) \geq 0, \ [\forall X_i, a \leq X_i \leq b]; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(X_i) = 1 \end{cases}$$

ولإيجاد الإحتمال الواقع ضمن المجال $[a,b]$ نقوم بحساب المساحة تحت المنحنى، و التي تسمى $P[a \leq X_i \leq b]$ والموضحة بالشكل البياني الأتي:



$$\boxed{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

مثال: I- أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الإحتمالية في الدالة التالية:

$$f(X) = \begin{cases} cx^2 & ,0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ,\text{Sinon} \end{cases}$$

II- أحسب احتمال أن تكون (X) تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

III-أحسب احتمال أن تكون (X) لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

الحل:

I- إيجاد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة f (X) دالة كثافة احتمالية:

- **الشرط الأول:** لدينا $X \in [0 , 3]$ ومنه تحقق الشرط الأول.
- **الشرط الثاني:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dX + \int_{0}^{3} CX^2dX + \int_{3}^{+\infty} 0dX = 1 \Rightarrow C\left[\frac{X^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{9}$$

$\therefore$ لكي تكون f (X) دالة كثافة احتمالية يجب أن يكون C = 1/9 .

II- احتمال أن تكون (X) تنتمي للمجال من 1 إلى 2:

$$P(1 < X \leq 2) = \int_{1}^{2} f\ (X)dX = \int_{1}^{2} (1/9)X^2dX = \frac{1}{9}\left[\frac{X^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

III- احتمال أن تكون (X) لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2:

$$P(1 > X > 2) = 1 - P(1 < X < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

2-3- التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل:

إذا كان لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X)، وله دالة كثافة احتمالية ولتكن $[f(X_i)]$ فإن:

- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل (X) يكتب بالصيغة الآتية:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} X * f(X_i)dx$$

- التباين للمتغير العشوائي المتصل (X) يكتب بالصيغة الآتية:

$$\sigma_x^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 * f(X_i)dx - \mu_x^2$$

2-3- التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل:

إذا كان لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X)، وله دالة كثافة احتمالية ولتكن $[f(X_i)]$ فإن:

- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل (X) يكتب بالصيغة الآتية:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} X * f(X_i)dx$$

- التباين للمتغير العشوائي المتصل (X) يكتب بالصيغة الآتية:

$$\sigma_x^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 * f(X_i)dx - \mu_x^2$$

$V(C) = 0$	$E(C)=C$ توقع عدد ثابت
$V(CX) = C^2V(X)$	$E(CX) = CE(X)$
في حالة استقلال المتغيران عن بعضهما: $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$	$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما: $E(XY) = E(X)E(Y)$

2-4- التوزيعات الإحتمالية المستمرة (المتصلة):

تعد هذه التوزيعات ذات أهمية كبيرة على مستوى استخدامها في المجالات الإدارية والإقتصادية والإجتماعية والتربوية من الناحيتين النظرية والتطبيقية، إذ يتم من خلال هذه التوزيعات تحديد شكل دالة التوزيع الإحتمالي ونوعها، وحساب الإحتمالات التي يحتاجها الباحث في الحياة العملية، وتكون المتغيرات العشوائية لهذا النوع من التوزيعات متمثلة بجميع القيم في فترة ما ولتكن $(a \le X \le b)$، مما يجعل عدم إمكانية عد هذه القيم وإنما يتم قياسها بشكل تقريبي، مثال ذلك: أطوال الطلبة، أو أوزانهم، أجور العمال، أسعار السلع، وتكون التوزيعات الإحتمالية المتصلة على عدة أنواع نذكر منها:

- التوزيع الطبيعي؛
- التوزيع الطبيعي المعياري؛
- التوزيع المنتظم؛
- توزيع كاما؛
- التوزيع الأسي؛
- توزيع بيتا.

2-4-1- التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس-كاوس Normal.D Laplace –Gausse.D:

يعود الفضل باكتشاف هذا التوزيع إلى العالم الرياضي الإنكليزي "دي مويفر" عام 1733م، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعي في دراسة الأخطاء المحتملة في القياس ، إذ أنه يستخدم على نطاق واسع في وصف عدد كبير من الظواهر الطبيعية منها: وصف متغيرات الأوزان والأطوال، قياس مستوى الذكاء، ضبط جودة الإنتاج...إلخ.

بافتراض أنه لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X)، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) فإن دالة التوزيع الإحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ,-\infty<X<\infty \\ 0 & ,S/n\end{cases}$$

حيث أن: (μ) و (σ^2) تمثل معلمات التوزيع الطبيعي وإن $[\sigma^2>0,-\infty<\mu<\infty]$؛

π تمثل النسبة الثابتة التقريبية حيث أن: $[\pi=3.14286]$.

وغالباً ما يعبر عن التوزيع الطبيعي اختصاراً بالإصطلاح التالي:

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

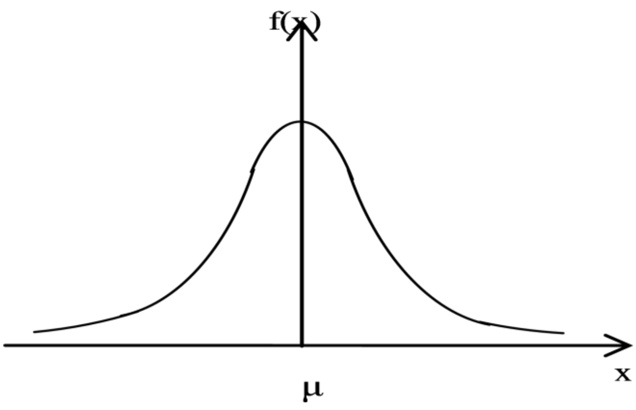
و التي تقرأ (X) يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2).

إن الوسط الحسابي (μ_x) و التباين (σ_x^2) والإنحراف المعياري (σ_x) للتوزيع الطبيعي تكتب على النحو التالي:

$$\begin{cases}\mu_x=\mu \\ \sigma_x^2=\sigma^2 \\ \sigma_x=\sqrt{\sigma^2}\end{cases}$$

يتصف التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية:

- إن منحنى دالة الكثافة الإحتمالية $[f(X)]$ للتوزيع الطبيعي يشبه شكل الناقوس (الجرس)، ويكون متماثلاً حول المحور الرأسي المار بالنقطة $(X=\mu)$ والشكل التالي يوضح ذلك:



- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$P(-\infty<X<\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}f(X)dx=1$$

إذ يمكن حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي بين النقطتين (b,a) مثلاً على النحو التالي:

$$P(b < X \leq a) = \int_b^a f(X)dx = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

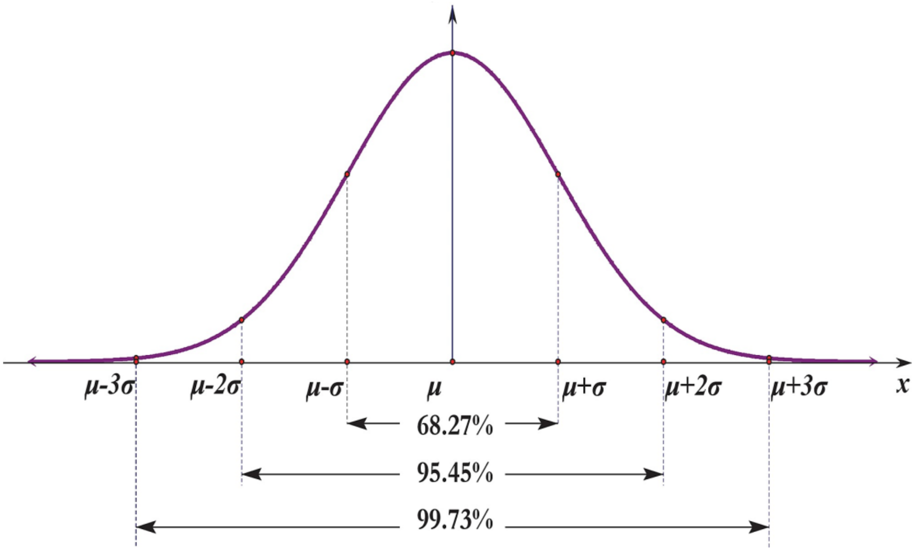
- تمتلك دالة الكثافة الإحتمالية $[f(X)]$ للتوزيع الطبيعي نقطتي انقلاب عند

$$[X = \mu - \sigma, X = \mu + \sigma]$$

وتكون قيم الإحتمالات كمايلي:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827 = 68.27\%$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545 = 95.45\%$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973 = 99.73\%$$

والشكل الموالي يوضح ذلك.



2-4-2- التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتصل (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (μ) و تباين (σ^2) أي أن:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

فإن المتغير العشوائي (Z) يمكن الحصول عليه من خلال إجراء التحويل الموالي: عليه فإن المتغير العشوائي (Z) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري وله دالة كثافة احتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.e^{-\frac{z^2}{2}} & ,-\infty < X < \infty \\ 0 & ,S/n \end{cases}$$

وغالباً ما يعبر عن التوزيع المعياري اختصاراً بالإصطلاح التالي: $Z(0\ ,\ 1)$ وهذا يعني أن المتغير العشوائي (Z) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري بالمعلمتين $(\mu = 0)$ و $(\sigma^2 = 1)$ إن الوسط الحسابي (μ_Z) والتباين (σ_Z^2) والإنحراف المعياري (σ_Z) تكتب على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mu_x = 0 \\ \sigma_x^2 = 1 \\ \sigma_x = 1 \end{cases}$$

ملاحظة:

$$P(Z \le z) = \varphi(z)$$
$$\varphi(-1) = 1 - \varphi(1)$$

حيث أن $\varphi(z)$ تمثل قيمة احتمالية يتم الحصول عليها من الجداول الإحصائية الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري.

2-4-2-1- حساب قيمة الإحتمالات للمتغيرات العشوائية ذات التوزيع الطبيعي:

على افتراض لدينا المتغير العشوائي المتصل (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (μ) و تباين (σ^2) أي أن:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

فعند حساب قيم الإحتمالات لهذا النوع من التوزيعات نقوم بتحويل المتغير العشوائي (X) إلى درجات معيارية (Z) وفقاً للصيغة التالية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال(1): إيجاد قيمة الإحتمال التالي $P(X \le 10)$ للمتغير العشوائي (X) بمتوسط (μ) و تباين (σ^2)

الحل:

$$\begin{aligned} P(X \le 10) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{10-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \le \frac{10-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{10-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

مثال(2): إذا كان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي أي أن:

$$X \sim N(16, 9)$$

المطلوب: أحسب الإحتمال: $P(X \ge 10)$ ؟

الحل:

المعطيات:

$$\because \mu = 16, \qquad \sigma = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10)\\ &= 1 - P\left(\frac{X-16}{3} \leq \frac{10-16}{3}\right)\\ &= 1 - P(Z \leq -2) = 1 - [1-\varphi(2)] = \varphi(2)\\ &= 0.9772\end{aligned}$$

مثال(3): لنفرض أن معامل ذكاء الطلبة الحاضرين لاختبار مقياس الإحصاء يخضع للتوزيع الطبيعي بوسط 110 وتباين 100.

المطلوب: I – ماهي نسبة الطلاب الذين يقع معامل ذكائهم ما بين 100 و 125 ($100 \leq p \leq 125$)؟؛

II– ماهو عدد الطلاب الذين يقع معامل ذكائهم ما بين 100 و 125 من بين 1000 طالب؟.

الحل:

المعطيات: $\mu_x = 110$ ، $\sigma_x^2 = 100$ ، ومنه : $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{100} = 10$

1- نسبة الطلاب الذين يقع معامل ذكائهم ما بين 100 و 125 ($100 \leq p \leq 125$):

$$\begin{aligned}P(100 \leq X \leq 125) &= P\left(\frac{100-110}{10} \leq \frac{X-110}{10} \leq \frac{125-110}{10}\right)\\ &= P(-1 \leq Z \leq 1.5)\\ &= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1)\\ &= \varphi(1.5) - [1-\varphi(1)]\\ &= 0.9332 - 1 + 0.8413\\ &= 0.7745\\ &\approx 77\%\end{aligned}$$

2– عدد الطلاب الذين يقع معامل ذكائهم ما بين 100 و 125 من بين 1000 طالب: بما أن نسبة الطلاب الذين يقع معامل ذكاءهم بين 100 و 125 هو 77%، ومنه فإن عدد الطلبة من بين 1000 طالب هو:

1000×0.77=770 طالب

2-4-3- التوزيع المنتظم:

بافتراض أنه لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المنتظم بـــالمعلمتين (α) و (β) فإن دالة التوزيع الإحتمالي $[f(X)]$ للمتغير العشوائي (X) تأخذ الشكل التالي:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & ,\alpha\leq X\leq\beta\\ 0\qquad , & ,S/n\end{cases}$$

يُعد التوزيع المنتظم من أهم التوزيعات الإحتمالية في الواقع العملي، إذ يستخدم لحساب الإحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات مثل دراسة احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريـــغ حمولتـــها و أوقـــات مغادرتها، و وصل الشاحنات إلى محطات التفريغ.

وغالباً ما يُعبر عن التوزيع المنتظم اختصاراً بالإصطلاح التالي:

$$X\sim U(\alpha,\beta)$$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين (α) و (β).

إن الوسط الحسابي (μ_x) و التباين (σ_x^2) و الإنحراف المعياري (σ_x) للتوزيع المنتظم تكتب علـــى النحو التالي:

$$\begin{cases}\mu_x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \sigma_x^2=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}\\ \sigma_x=\dfrac{(\beta-\alpha)}{\sqrt{12}}\end{cases}$$

2-4-4- التوزيع الأسي:

والمؤشرات الخاصة للتوزيع هي:

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{1}{k}\\ \sigma^2=\dfrac{1}{k^2}\\ \sigma=\dfrac{1}{k}\end{cases}$$

مثال: في معمل للمشروبات الغازية لوحظ أن معدل زمن انتظار الحصول على قنينة غير صالحة للتسويق هي 3 ثوان، فما هو احتمال مرور أكثر من 4 ثوان دون ملاحظة قنينة غير صالحة، وأوجد المؤشرات الإحصائية للتوزيع: (μ)و التباين (σ^2) و الإنحراف المعياري (σ).

الحل:

واضح أن التوزيع هنا هو الأسي بمعدل ($\mu = 3$) لذلك تكون معلمة التوزيع ($k = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{3}$)،

ويكون دالة الكثافة الإحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

فيكون الإحتمال المطلوب هو:

$$P(x > 4) = \int_4^{\infty} \tfrac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = -e^{-\frac{1}{3}x} \Big|_4^{\infty} = 0 + e^{-\frac{4}{3}} = 0.264$$

والمؤشرات الإحصائية للتوزيع هي:

$$\begin{cases} \mu = 3; \\ \sigma^2 = 9; \\ \sigma = 3 \end{cases}$$